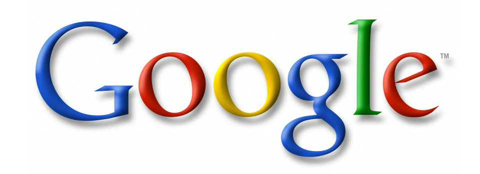
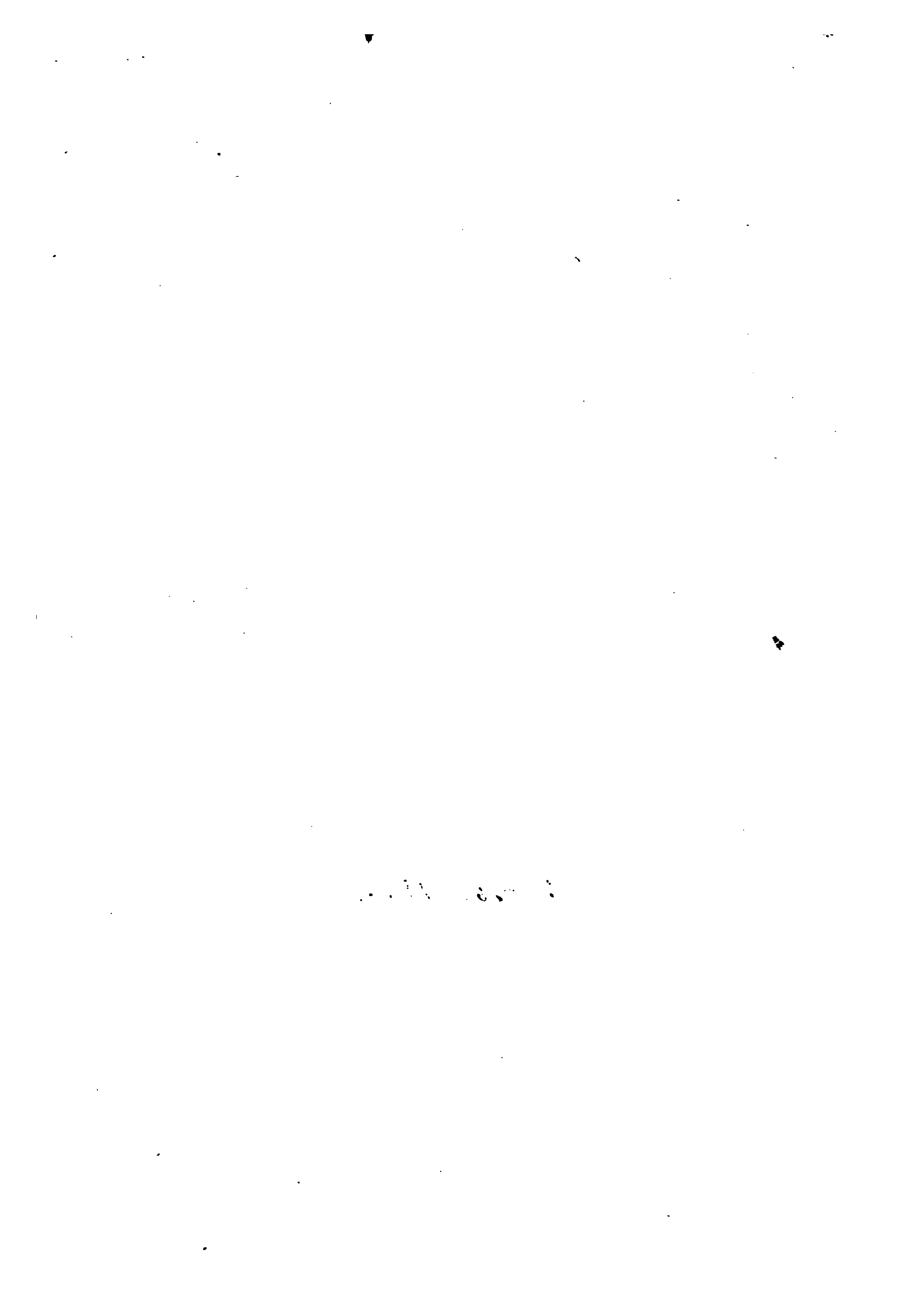




Die vier Rechnungsoperationen mit Bessel'schen Functionen

nebst einer geschichtlichen Einleitung.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Bern

vorgelegt von

S. Sigismund Epstein

aus Wien.

BERN.

Buchdruckerei K. J. Wyss.

1894.

Auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Graf von der philosophischen Facultät für den Druck genehmigt.

Der Dekan:

Prof. Dr. A. Rossel.

Einleitung.

§ 1. Für Körper, die ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind, fand Laplace folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0, \qquad \text{I)}$$

wo V die sogenannte Potentialfunction bedeutet, und bemerkt bei dieser Gelegenheit:

«Cette équation remarquable nous sera de la plus grande utilité dans la théorie de la figure des corps célestes.»*)

Diese Gleichung wurde für die Mathematik von ebenso grundlegender, als weittragender Bedeutung, insofern, als sie beim Studium derjenigen Probleme, welche mit Kräftefunctionen in irgend einem Zusammenhang stehen, sich immer von neuem ergab; vom Erfolge ihrer Integration hing demnach auch die Lösung des betreffenden Problems ab.

§ 2. Eine nicht geringere Bedeutung hat die Integration dieser Gleichung auch für die gesamte angewandte Mathematik, indem sie einerseits geeignet ist, den Zusammenhang zwischen Attraction, Elektricität und Wärme klarzulegen, andererseits die Newtonschen Gesetze in ganz neuem Licht erscheinen zu lassen. Nun sind aber unter den Differenzialgleichungen, zu denen wir, sei es durch die Mechanik, sei es durch die Astronomie gelangen, sehr wenige, die für jeden beliebigen Bereich streng integrabel sind; die Mathematiker nahmen daher ihre Zuflucht zu unendlichen Reihen, die nur innerhalb eines gewissen Bereiches giltig sind; auf diese Reihen stützt sich das ganze Gebäude der angewandten Mathematik.

§ 3. Es ist also einleuchtend, dass sofort nach Aufstellung der oben erwähnten Gleichung I) und nach Erkennung ihrer Wichtigkeit, die zeitgenössische Mathematik ihre Aufgabe darin erblickte, für diese Gleichung solche unendliche Reihen aufzustellen, die ihr erstens genügen würden und zweitens eine möglichst einfache Form hätten.

*) Laplace, Traité de mécanique céleste, partie I, livre II, p. 157.

An diese Aufgabe machten sich Laplace, Gauss und Green, welche die Gleichung bloss für den Fall einer Kugel integrirten, und zwar war Laplace der erste, der sie vermittelst Polarcoordinaten*) transformirte und dabei auf folgende Gleichung kam, die für den Bereich eines Sphäroïdes gilt, das sich wenig von der Kugel unterscheidet:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}\right\}+\frac{\frac{\delta^2 V}{\delta\omega^2}}{1-\mu^2}+r\,\frac{\delta^2(rV)}{\delta r^2}=0; \quad \text{II)}$$

*) Laplace, Traité de mécanique céleste, partie I, livre II, p. 159 ..... «on peut lui donner d'autres formes plus commodes dans diverses circonstances; concevons, par exemple, que de l'origine des coordonnées on mène au point attiré un rayon que nous nommerons r; soit Θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, et ω l'angle que le plan formé par r et par cet axe fait avec le plan des x et des y; on aura

$$x = r\cos\Theta,\ y = r\sin\Theta\cos\omega,\ z = r\sin\Theta\sin\omega;$$

d'ou l'on tire

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \cos\Theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \operatorname{tg}\omega=\frac{z}{y};$$

on pourrait aussi avoir les differences partielles de r, Θ et ω, relativement aux variables x, y et z; et l'on en conclura les valeurs de $\frac{ddV}{dx^2}$, $\frac{ddV}{dy^2}$, $\frac{ddV}{dz^2}$, en differences partielles de V, relatives au variables r, Θ et ω. Comme nous ferons souvent usage de ces transformations des differences partielles, il est utile d'en rappeler ici le principe. En considerant V, comme fonction des variables x, y, z et ensuite des variables r, Θ et ω, on a

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}+\frac{dV}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}+\frac{dV}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}.$$

Pour avoir les differences partielles $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\Theta}{dx}$, $\frac{d\omega}{dx}$, il ne faut faire varier que x, dans les expressions précédentes de r, $\cos\Theta$ et $\operatorname{tg}\omega$; en differenciant donc ces expressions, on aura

$$\frac{dr}{dx}=\cos\Theta,\ \frac{d\Theta}{dx}=\frac{-\sin\Theta}{r},\ \frac{d\omega}{dx}=0$$

ce qui donne

$$\frac{dV}{dx}=\cos\Theta\cdot\frac{dV}{dr}-\frac{\sin\Theta}{r}\cdot\frac{dV}{d\Theta}.$$

On aura donc ainsi la difference partielle $\frac{dV}{dx}$, en differences partielles de la fonction V, prises par rapport aux variables r, Θ et ω. En differenciant de nouveau cette valeur de $\frac{dV}{dx}$, on aura la difference partielle $\frac{ddV}{dx^2}$, en differences partielles de la fonction V, prises par rapport aux variables r, Θ et ω. On aura par le même procédé les valeurs de $\frac{ddV}{dy^2}$ et $\frac{ddV}{dz^2}$.

diese Differenzialgleichung kann für den Fall, dass das Sphäroïd eine Kugel ist, auch so geschrieben werden:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}\right\}+n(n+1)V=0, \qquad \text{III)}$$

wo n eine Constante bedeutet. Die Gleichung III) ist die Differenzialgleichung der Kugelfunction erster und zweiter Art, in der Form, wie wir sie heute gebrauchen; von ihr geht Laplace aus, indem er die Schwierigkeiten des vorliegenden Problems erkennt*) und uns nur eine näherungsweise Bestimmung des allgemeinen Integrales gibt**).

Wenn auch das absolute Verdienst von Laplace um die reine Mathematik nicht so gross war, so haben wir ihm doch einen kostbaren Fingerzeig zu verdanken, nämlich, dass wir bei Integration der Gleichung I) nur dann Aussicht auf Erfolg haben, wenn wir das Festhalten an Cartesischen Coordinaten aufgeben und möglichst allgemeine einführen.

Der nächste, der sich nach Laplace mit der Integration der Gleichung I) beschäftigte, war Gauss, der die Gleichung III) noch ein-

---

On transformera de cette manière l'équation (A) dans la suivante:

$$0=\frac{ddV}{d\Theta^2}+\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\cdot\frac{dV}{d\Theta}+\frac{\frac{ddV}{d\omega^2}}{\sin^2\Theta}+r\frac{dd(rV)}{dr^2} \qquad \text{(B)}$$

et si l'on fait

$$\cos\Theta=\mu$$

cette dernière équation deviendra:

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu\mu)\frac{dV}{d\mu}\right]}{d\mu}\right\}+\frac{\frac{ddV}{d\omega^2}}{1-\mu\mu}+r\frac{dd(rV)}{dr^2}. \qquad \text{(C)}$$

*) Mécanique céleste, partie I, livre II, p. 166: «Si l'on pourrait intégrer généralement cette équation, on aurait une expression de V, qui renfermerait deux fonctions arbitraires que l'on determinerait en cherchant l'attraction du sphéroïde sur un point, situé dans une position, qui facilite cette recherche et en comparant cette attraction à son expression générale. Mais l'intégration de l'équation (C) n'est possible que dans quelques cas particuliers, tel que celui ou le sphéroïde attirant est une sphère, ce qui réduit cette équation aux differences ordinaires; elle est encore possible dans le cas ou le sphéroïde est un cylindre, dont la base est une courbe rentrante, et dont la longueur est infinie . . . .»

) Ibidem, p. 176: «Après avoir donné les équations differencielles du mouvement d'un système de corps soumis à leurs attractions mutuelles, et après en avoir determiné ***les seules intégrales exactes, que l'on ait pu obtenir jusqu'à présent*, il nous reste à intégrer ces équations par des approximations successives.»

mal ableitet*), eine allgemeine Integrationsmethode gibt**) und überhaupt der erste ist, der den Ausdruck «Kugelfunction» gebraucht***).

§ 4. Die weiteren Erfolge, welche neben Laplace und Gauss noch Green und Legendre nach der angegebenen Richtung hin erzielten, mussten notwendig die Vermutung hervorrufen, die bisherigen seien noch lange zu keinem Resultate gelangt, sondern stellen etwa nur den Anfang eines noch unbekannten Ganzen dar, welches noch der

---

*) Gauss, «Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus». Gesammelte Werke, Bd. V, p. 1.

**) Ibidem, S. 141: «Substituirt man in jener Gleichung den Wert von $V = \frac{R^3P'}{rr'} + \frac{R^4P''}{r^3} + \frac{R^5P'''}{r^4}$ etc., so erhellt, dass für die Coefficienten P', P'', P''' etc. gleichfalls partielle Differenzialgleichungen stattfinden werden, deren allgemeiner Ausdruck ist:

$$n(n+1)P^n + \frac{\partial^2 P^n}{\partial n^2} + \operatorname{cotg} n \frac{\partial P^n}{\partial n} + \frac{1}{\sin n} \frac{\partial^2 P^n}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit Bemerkungen im vorhergehenden Artikel, ergibt sich die allgemeine Form von P^n.

Bezeichnet man nämlich mit P^{n-m} folgende Function von U:

$$P^{n-m} = \left\{ \cos U^{n-m} - \frac{(n-m)(m-n-1)}{2(2n-1)} + \frac{(n-m)(m-n-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \cos u^{n-m-4} \ldots \right\} \sin u^m,$$

so hat P^n die Form eines Aggregates von $2n+1$ Teilen:

$$P^n = g^{n/o} P^{n/o} + (g^{n/\prime} \cos\lambda + h^{n/\prime} \sin\lambda) P^{n/\prime} + (g^{n/2} \cos 2\lambda + h^{n/2} \sin 2\lambda) P^{n/2} + \ldots + (g^{n/n} \cos n\lambda + h^{n/n} \sin n\lambda) P^{n/n},$$

wo g bestimmte Zahlencoefficienten sind.»

***) «Göttinger gelehrte Anzeigen», 10. Januar 1828, 6 Stück, p. 1.

Vgl. auch diesbezüglich: Gauss' sämtliche Werke, Bd. V, Nachlass, p. 16: «Um P, eine homogene Function von x, y, z, von der Ordnung i in reine Kugelfunctionen zu zerlegen, dient folgendes: man setze

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = P' = fP;\ fP' = P'';\ fP'' = P''' \text{ etc.}$$

und schreibe der Kürze halber:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho.$$

Man wird dann P in die Form bringen:

$$P = A + \varrho B + \varrho^2 C + \varrho^3 D \text{ etc., etc.,}$$

sodass dann A, B, C ... reine Kugelfunctionen sind, die mittelst folgender Gleichungen gefunden werden:

$$P = A + \varrho B + \varrho^2 C + \varrho^3 D + \varrho^4 E + \varrho^5 F \text{ etc.}$$

$$P' = 2.(2i-1)B + 4(2i-3)\varrho C + 6(2i-5)\varrho^2 D \text{ etc.}$$

$$P'' = 2.4(2i-3)(2i-5)C + 4.6(2i-5)(2i-7)\varrho D + 6.8(2i-7)(2i-9)\varrho^2 E \text{ etc.}$$

$$P''' = 2.4.6(2i-5)(2i-7)(2i-9)D + 4.6.8(2i-7)(2i-9)(2i-11)\varrho E + 6.8.10(2i-9)(2i-11)(2i-13)\varrho^2 F + 8.10.12(2i-11)(2i-13)(2i-15)\varrho^3 G + \text{etc., etc., etc.»}$$

Lösung harre. Die Methoden, welche nun die Wissenschaft anwandte, um zu einer möglichst allgemeinen Lösung des uns beschäftigenden Problems zu gelangen, gingen nach zwei verschiedenen Richtungen auseinander, welche sich dennoch gegenseitig befruchteten und die in ihrem Endziel wieder zusammentrafen.

Diese Richtungen sind: die rein analytische — und die geometrische.

Der Ausgangspunkt dieser beiden Richtungen ist ein gemeinsamer, denn man kam sehr bald zur Überzeugung, dass eine ganz allgemeine algebraische Integration der Gleichung I) wohl überhaupt ausser dem Bereich der Möglichkeit liege; die erste zu lösende Frage war also die, festzustellen, wann und für welche Bereiche die Integration unserer Gleichung eindeutige Resultate liefern könne.

So ist denn auch leicht begreiflich, dass ein so wichtiges Problem der Mittelpunkt einer stattlichen Litteratur wurde, und dass seit Gauss kein bedeutender Mathematiker existirt, der sich mit dem Problem, eine neue partikuläre Lösung der Gleichung I) zu finden, nicht beschäftigt hätte.

Fourrier, Legendre, Lagrange, Bessel, Jacobi, Lamé etc. etc., sie alle machten mehr oder minder gelungene Versuche, die Gleichung I) für gewisse Bereiche zu integriren. —

§ 5. So wie jedoch die eine Richtung sich bemühte, diese Lösungen auf rein analytischem Wege zu finden, so ist die Tendenz der anderen Richtung dadurch gekennzeichnet, dass sie sich bestrebte, die Gleichung I) vermittelst Einführung allgemeiner krummliniger Coordinaten zu transformiren und dadurch auf eine bequemere Form zu bringen.

Diese Forschungen stützen sich mehr oder weniger alle auf das Dirichletsche Princip*); wenn die Gültigkeit desselben auch nicht überall und immer unanfechtbar ist, so zeigte dasselbe immerhin klar, dass es die Aufgabe der Mathematik ist, eine Function V für einen möglichst allgemeinen geschlossenen Raum zu finden, der sich durch

*) Crelles Journal, Bd. XVII, p. 35: «Es gibt eine und nur eine Function von V, die innerhalb eines geschlossenen Raumes stetig ist, und deren erste Ableitung ebenfalls stetig ist, die innerhalb dieses ganzen geschlossenen Raumes die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt und die sich in jedem Punkte der Oberfläche auf einen vorgeschriebenen Wert reducirt.»

Veränderung gewisser Parameter dann auf diejenigen geschlossenen Räume reduciren liesse, für welche die Function V bereits gefunden ist.

§ 6. An diese Erwägung anknüpfend und in richtiger Beurteilung, dass die schönen Erfolge auf diesem Gebiete von Laplace und Gauss nur dem Umstande zu verdanken seien, dass die Gleichung I) durch Polarcoordinaten transformirt wurde, lehnte sich die geometrische Richtung an die Flächentheorie an und suchte mit ihrer Hilfe die Gleichung I) vermittelst neuer, ganz allgemeiner krummliniger Coordinaten zu transformiren.

Das Princip der krummlinigen Coordinaten beruht darauf, dass in den Raum drei Flächen zweiter Ordnung eingeführt werden, die durch ihre Parameter gegeben sind; lassen wir nun diese Parameter variieren, so erhalten wir durch ihre Durchschnitte eine Anzahl vollständig eindeutiger Punkte im Raume.

Von dieser Auffassung ausgehend gelingt es Lamé*), durch Einführung einer Schar von Flächen zweiter Ordnung den dreidimensionalen Raum auf eine Dimension zu reducieren, und er kommt zu einem Resultat**), wobei die transformirte Gleichung I) für jeden ganz allgemeinen, von Flächen zweiter Ordnung begrenzten Bereich gilt und sich mit Leichtigkeit auf die Kugel- und verwandte Functionen zurückführen lässt.

Es ist hier nicht der Ort, um auf eine detaillierte Untersuchung der Laméschen Functionen einzugehen; aber es war von Wichtigkeit zu zeigen, von welcher Bedeutung die Entwickelung der Flächentheorie für die Integrirbarkeit der Gleichung I) ist und dass es vielleicht der geometrischen Richtung vorbehalten ist, unser Problem seiner Lösung nahe zu bringen.

§ 7. Während, wie wir gesehen, die geometrische Richtung ihre eigenen Wege fortwandelte, schloss sich die rein analytische

---

*) Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.

**) Die durch Einführung der Laméschen Coordinaten transformirte Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{P(x)} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial t^2} - \left\{ n.(n+1)x - \varepsilon \right\} P(x)$$

wobei $V = P'(x) P''(x) P'''(x)$. (Lamé, Leçons sur les coordonnées etc., p. 237.)

eng an Laplace und Gauss an, und schon im Jahre 1816 gibt Bessel*) eine neue Reihenentwickelung, welche dem Kepplerschen Problem genügt**).

Bessel scheint jedenfalls eingesehen zu haben, dass die von ihm mit J bezeichnete Transcendente berufen ist, eine grosse Rolle zu spielen, denn in einer 8 Jahre später erschienenen Abhandlung***) kommt Bessel auf die J-Function zurück und findet mehrere interessante Eigenschaften derselben†); aus dem Umstande, dass Bessel,

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, Mathemat. Classe, p. 55.

**) $$J_k^h = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{\Pi h}\left[1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.(h+1)(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3.(h+1)(h+2)(h+3)}\left(\frac{k}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

***) «Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht» (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, Mathemat. Classe, p. 1. Jahr 1824).

†) Diese Eigenschaften sind:

1) $J_k^{-h} = (-1)^h J_k^h$.

2) $k J_k^{h-1} - 2h J_k^h + k J_k^{h+1} = 0$.

3) $\frac{\delta J_k^h}{\delta k} = \frac{h}{k} J_k^h - J_k^{h+1}$.

4) $$\frac{J_k^{h+n}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{h+n}} = (-1)^n \frac{\delta^n \left\{\frac{J_k^h}{\left(\frac{k}{2}\right)^h}\right\}}{\delta\left(\frac{k^2}{4}\right)^n}.$$

5) $$\frac{\delta^2 J_k^h}{\delta k^2} + \frac{1}{k}\frac{d J_k^h}{dk} + \left[1 - \frac{h^2}{k^2}\right] J_k^h = 0.$$

6) $$J_k^h = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\lambda^h J^0 + \lambda^{h-1} J^1 + \ldots\ldots \lambda^0 J^h - \lambda^{h+1} J^1 + \lambda^{h+2} J^2 - \ldots\ldots + \lambda J^{h+1} \ldots\right\}.$$

7) $$J_k^h = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos\left\{k\varphi - ik\sin\varphi\right\} d\varphi.$$

8) $$J_{(k)}^u = \frac{x^u}{1.3.5\ldots(2u-1)} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2u}\varphi\, d\varphi.$$

der sich sonst mit rein mathematischen Speculationen wenig abgibt, der Untersuchung der Differenzial- und Integraleigenschaften der J-Function eine so eingehende Sorgfalt zuwendet, kann man nicht mit Unrecht schliessen, *dass er die J-Function nicht als blosses Hilfsmittel zur Lösung der Kepplerschen Aufgabe betrachtete, sondern dass sein scharfer durchdringender Geist schon damals ahnte, dass die Function J vermöge ihrer Eigenschaften berufen sei, in der reinen Mathematik und mathematischen Physik eine Rolle zu spielen, die von jener der goniometrischen Functionen nur wenig verschieden ist.*

§ 8. Es verging jedoch eine geraume Zeit, bevor man anfing, sich mit den Besselschen Functionen vom rein mathematischen Standpunkt aus zu beschäftigen.

Erst nach zwölf Jahren untersuchte Jacobi*) eingehend die J-Function vom rein analytischen Standpunkt aus und gelangte auf ganz selbständige Weise und auf anderem Wege zur Besselschen Integralfunction.

Die erst nach weiteren 20 Jahren erschienenen Abhandlungen von Anger**) und Schlömilch***) gehen weniger auf die Eigenschaften der Besselschen Function selbst ein, als auf die Frage, wann und unter welchen Umständen eine arbiträre Function in eine Reihe entwickelbar ist, die nach Besselschen Functionen fortschreitet.

§ 9. Den eigentlichen Grund zur Litteratur und Theorie der Besselschen Functionen legen die in den Jahren 1867, respective 1868 erschienenen Arbeiten von Carl Neumann und Eugen Lommel, worin dieselben, neben vielem Neuen, diejenigen Resultate pragmatisch zusammenfassen, welche sie schon vorher in mehreren kleineren Aufsätzen niedergelegt haben.

Obwohl beide Verfasser in der Behandlung ihrer Aufgabe†) von zwei ganz verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen — Herr Neumann fasst nämlich die Besselsche Function als Analogon zu den Kugelfunctionen auf, während Herr Lommel, diese Analogie beiseite lassend, sämtliche Eigenschaften der J-Function aus drei Grundanschauungen

---

*) Jacobi, Formula transformationis integralium definitorum. Crelles Journal, Bd. XV.

**) Untersuchungen über die Function J_k^h und ihre Anwendungen auf das Kepplersche Problem. Danzig 1855.

***) Schlömilch, Über die Besselsche Function. Zeitschrift f. Math. u. Physik. 2. Bd. 1857.

†) I. Neumann, C., Theorie der Besselschen Functionen, Leipzig, 1867.
II. Lommel, E., Studien über die Besselschen Functionen, Leipzig, 1868.

abzuleiten sucht — *so treffen sie sich doch in einem Punkte und der ist, — diejenigen Eigenschaften der Besselschen Functionen ausfindig zu machen, welche deren Anwendung möglichst verallgemeinern könnten.*

Es wurde schon weiter oben bemerkt, die Besselschen Functionen scheinen berufen zu sein, in den Anwendungen des Kalkuls eine ähnliche Rolle zu spielen, wie die goniometrischen. Es wird sich demnach die vorliegende Arbeit mit denjenigen Eigenschaften der Besselschen Functionen zu beschäftigen haben, die eine unbedingte Voraussetzung zu deren Anwendbarkeit sind.

Wir meinen deren Additions-, Subtractions-, Multiplikations- und Divisionstheorem. Es scheint daher nicht unwichtig, sich damit etwas näher zu befassen.

Nun waren die Herren Neumann und Lommel die ersten, welche sich auf das Entwickeln dieser Eigenschaften verlegten. Wir werden daher, von ihnen ausgehend, die Untersuchungen, obige Eigenschaften betreffend, systematisch durchmustern, wobei, an die einzelnen Leistungen anknüpfend, auch eigene Bemerkungen und Ergänzungen Platz finden dürften.

A.

Es sei in Folgendem nach Hanckel*) die Besselsche Function 1. Art dargestellt durch die Summenformel

$$J^n(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

oder als Integral

$$J^n(x) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{\left(-\frac{N}{x}\, 0\right)} e^{xs}\, t^{-n-1}\, dt,$$

wo

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$

N eine sehr grosse Zahl bedeuten soll, die unendlich gross zu werden bestimmt ist und endlich n eine ganz beliebige Zahl bedeutet.

Die Besselsche Function 2. Art nach Neumann sei ferner definiert durch die Summe

---

*) Cylinderfunctionen 1. und 2. Art. Mathematische Annalen, Bd. 1.

$$0^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$$

oder als Integral

$$0^n(x) = \int^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \frac{1}{2}(t^n + (-1)^n t^{-n})\, ds\,,$$

wobei, wie früher,

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

I.

Addition und Subtraction der Argumente bei Besselschen Functionen.

§ 1. Herr Lommel*) leitet eine Formel für $J^m(z+h)$ ab, indem er diesen Ausdruck nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt und erhält:

$$J^m(z+h) = \sum_0^\infty {}_p \frac{h^p}{p!} \frac{d^p}{dz^p} J^m(z). \tag{1}$$

Nun ist aber

$$\frac{d^p}{dz^p} J^m(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_0^p {}_q (-1)^q \binom{p}{q} J^{m+2q-p}(z). \tag{2}$$

Diese Formel substituirt in (1), gibt:

$$J^m(z+h) = \sum_0^\infty {}_p \sum_0^p {}_q (-1)^q \binom{p}{p} \frac{h^p}{2^p\, p!} J^{m-p+2q}(z). \tag{3}$$

wo $q \overline{\gtrless} p$.

Man kann daher auch schreiben:

$$J^m(z+h) = \sum_0^\infty {}_p \sum_0^p {}_q \frac{h^p}{2^p\, q!\,(p-q)!} J^{m-p+2q}(z). \tag{4}$$

Nun sind drei Fälle möglich,

1) $m - p + 2q = 0 \quad , \quad p = m + 2q,$
2) $m - p + 2q = r + 1 \quad , \quad p = m + 2q - r - 1,$
3) $m - p + 2q = -r - 1, \quad p = m + 2q + r + 1,$

*) Studien über die Besselschen Functionen, Leipzig, 1868, p. 26.

wo r beliebig positiv ganz, jedoch auch 0 sein kann.

Die rechte Seite von (4) zerlegt sich daher in 3 Teile und zwar:

$$J^m(z+h) = J^0(z) \sum (-1)^q \frac{h^{m+2q}}{2.4\ldots.2q.2.4.6\ldots(2m+2q)}$$

$$+ \sum \sum (-1)^q \frac{h^{m-r-1+2q}}{2.4\ldots 2q.2.4\ldots\{2(m-r-1)+2q\}} J^{r+1}(z)$$

$$- \sum \sum (-1)^q \frac{h^{m+r+1+2q}}{2.4\ldots 2q.2.4.6\ldots.\{2(m+r+1)+2q\}} J^{-(r+1)}(z). \qquad (5)$$

Es ist aber

$$\sum_0^\infty {}_q \frac{(-1)^q h^{m+2q}}{2.4\ldots 2q.2.4.6\ldots 2(m+q)} = J^m(h), \qquad (\alpha)$$

ferner

$$\sum_0^\infty {}_q \frac{(-1)^q h^{m-r-1+2q}}{2.4\ldots 2q.2.4\ldots\{2(m-r-1)+2q\}} = J^{m-r-1}(h). \qquad (\beta)$$

und endlich

$$\sum_0^\infty {}_q \frac{(-1)^q h^{m+r+1+2q}}{2.4.6\ldots 2q.2.4.6\ldots\{2(m+r+1)+2q\}} = J^{m+r+1}(h). \qquad (\gamma)$$

Substituirt man (α), (β) und (γ) in (5), so erhält man

$$J^m(z+h) = J^m(h) J^0(z) + \sum J^{r+1}(z) J^{m-r-1}(h) + \sum J^{-(r+1)}(z) J^{m+r+1}(h) \qquad (6)$$

oder z und h vertauscht

$$J^m(z+h) = J^0(h) J^m(z) = \sum J^{r+1}(h) J^{m-r-1}(z) + \sum J^{-(r+1)}(h) J^{m+r+1}(z). \qquad (7)$$

Diese von Herrn Lommel gefundenen Formeln (6) und (7) lassen sich etwas einfacher schreiben, wenn man ins Auge fasst, dass für ein ganzzahliges m

$$J^{-m}(z) = (-1)^m J^m(z).$$

Man gelangt dann zur Form:

$$J^m(z+h) = J^m(h) J^0(z) + \sum_0^\infty {}_r J^{r+1}(z) J^{m-r-1}(h) + \sum_0^\infty {}_r (-1)^{r+1} J^{r+1}(z) J^{m+r+1}(h)$$

oder

$$J^m(z+h) = J^m(h) J^0(z) + \sum_0^\infty {}_r \left\{ J^{m-r-1}(h) + (-1)^{r+1} J^{m+r+1}(h) \right\} J^{r+1}(z) \qquad (6^a)$$

oder

$$J^m(z+h) = J^0(h) J^m(z) + \sum_0^\infty {}_r \left\{ J^{m-r-1}(z) + (-1)^{r+1} J^{m+r+1}(z) \right\} J^{r+1}(h). \qquad (6^b)$$

Vermittelst derselben Ableitung findet Gegenbauer*) für die Besselschen Functionen zweiter Art die entsprechenden Relationen:

$$O^n(x+\xi) = J^n(\xi)\, O^0(x) + \sum_0^\infty {}_\varrho \left\{ J^{n-\varrho-1}(\xi) + (-1)^{\varrho+1} J^{n+\varrho+1}(\xi) \right\} O^{\varrho+1}(x) \qquad (8)$$

und

$$O^n(x+\xi) = J^n(x)\, O^0(\xi) + \sum_0^\infty {}_\varrho \left\{ J^{n-\varrho-1}(x) + (-1)^{\varrho+1} J^{n+\varrho+1}(x) \right\} O^{\varrho+1}(\xi). \qquad (9)$$

§ 2. Mit Benützung des Taylorschen Satzes kann man aber auch zu folgender Entwickelung gelangen:

$$J^n(x+y) = \sum_0^\infty {}_p \frac{y^p}{p!} \frac{d^p}{dx^p} J^n(x). \qquad (10)$$

Nun ist

$$\frac{d}{dx} J^n(x) = \frac{1}{2} \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{(n+2\lambda)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} J^n(x) = \frac{1}{2^2} \sum_0^\infty {}_\lambda \frac{(-1)^\lambda (n+2\lambda)(n+2\lambda-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-2}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} J^n(x) = \frac{1}{2^3} \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{(n+2\lambda)(n+2\lambda-1)(n+2\lambda-2)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-3}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d^p}{dx^p} J^n(x) = \frac{1}{2^p} \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{(n+2\lambda)\ldots\ldots(n+2\lambda-p+1)}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-p} \qquad (11)$$

Dies substituirt in (10) gibt:

$$J^n(x+y) = \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{(n+2\lambda)\ldots(n+2\lambda-p+1)}{p!\,\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\frac{y}{2}\right)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-p}$$

$$= \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \binom{n+2\lambda}{p} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\frac{y}{2}\right)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{-p}.$$

---

*) Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. LXVI, II. Abteilung, Juli-Heft.

Da aber

$$\sum_0^\infty \lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} = J^n(x),$$

folglich erhalten wir schliesslich

$$J^n(x+y) = J^n(x) \sum p \sum \lambda \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \qquad (12)$$

Ebenso erhalten wir für

$$J^{-n}(x+y) = J^{-n}(x) \sum p \sum \lambda \binom{-n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

$$= (-1)^n\, J^n(x) \sum p \sum \lambda \binom{-n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \qquad (12^a)$$

Ähnlich erhält man für

$$0^n(x) = \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda\, \frac{n}{4}\, \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+1}$$

nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$0^n(x+y) = \sum_0^\infty p\, \frac{y^p}{p!}\, \frac{d^p}{dx^p}\, 0^n(x). \qquad (13)$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dx}\, 0^n(x) = \frac{1}{2} \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda\, \frac{n}{4}\, \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (-n+2\lambda-1) \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, 0^n(x) = \frac{1}{2^2} \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda\, \frac{n}{4}\, \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (-n+2\lambda-1)(-n+2\lambda-2) \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^p}{dx^p}\, 0^n(x) = \frac{1}{2^p} \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda\, \frac{n}{4}\, \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (-n+2\lambda-1)(-n+2\lambda-2)$$

$$(-n+2\lambda-3)\ldots(n+2\lambda-p) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+2\lambda+p+1}.$$

Dies in (13) substituirt, gibt:

$$0^n(x+y) = \sum_0^\infty p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \left(\frac{y}{2}\right)^p \frac{n}{4}\, \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (-n+2\lambda-1).$$

$$(-n+2\lambda-2)\ldots(-n+2\lambda-p) \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+p+1}$$

$$= \sum_p \sum_\lambda \left(\frac{y}{x}\right)^p \binom{-n+2\lambda-1}{p} \frac{n}{4} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+1} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}.$$

Da aber

$$\sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}}{}_\lambda \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda+1} = O^n(x),$$

so erhalten wir schliesslich

$$O^n(x+y) = O^n(x) \sum_0^\infty{}_p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}}{}_\lambda \frac{(2\lambda-n-1)!}{p!(2\lambda-n-p-1)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \quad (14)$$

Für $O^{-n}(x+y)$ erhalten wir

$$O^{-n}(x+y) = O^{-n}(x) \sum_0^\infty{}_p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}}{}_\lambda \frac{(2\lambda+n-1)!}{p!(2\lambda+n-p-1)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p.$$

Nun gilt für ein ganzzahliges n auch für die Besselsche Function 2. Art die Relation

$$O^{-n}(x) = (-1)^n O^n(x)$$

und folglich

$$O^{-n}(x+y) = (-1)^n O^n(x) \sum_0^\infty{}_p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}}{}_\lambda \frac{(2\lambda+n-1)!}{p!(2\lambda+n-p-1)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \quad (14^a)$$

Es ist auch unschwer, die Schläflische complementäre K-Function darzustellen.

Dieselbe ist definirt durch die Gleichung:

$$K^n(x) = \operatorname{cotg} n\pi \, J^n(x) - \frac{1}{\sin n\pi} J^{-n}(x) \, *). \quad (15)$$

Berücksichtigt man zugleich, dass

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x),$$

so kann man die Formel (15) auch schreiben:

$$K^n(x) = \left(\operatorname{cotg} n\pi - \frac{(-1)^n}{\sin n\pi}\right) J^n(x). \quad (16)$$

---

*) Herr Schläfli stellt diese Function zuerst auf in den Annali di Matematica, serie II, tomo VI, p. 17. Die Eigenschaften der K-Function wurden eingehend untersucht von E. Gubler in der Züricher Vierteljahresschrift XXXIII, Heft II, 1888, worin gezeigt wird, dass man unter $K^n(x)$ den Grenzwert zu verstehen hat, den man erhält, wenn der variable Parameter n sich einer ganzen Zahl nähert.

Es war nun nach (12)

$$J^n(x+y) = J^n(x) \sum \sum \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

oder für $\lambda < p$

$$J^n(x+y) = J^n(x) \sum \sum \frac{(n+2\lambda)!}{p!(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \tag{17}$$

Wir berücksichtigen ferner, dass noch die Relationen

$$J^{-n}(x+y) = (-1)^n J^n(x+y)$$

und

$$K^{-n}(x) = (-1)^n K^n(x)$$

stattfinden müssen, und können nun zur Entwickelung von $K^n(x+y)$ schreiten.

Multiplizieren wir $J^n(x+y)$ mit

$$\cot g\, n\pi$$

ferner $J^{-n}(x+y)$ mit

$$-\frac{1}{\sin n\pi}$$

und addieren, so erhalten wir

$$\cot g\, n\pi\, J^n(x+y) = \cot g\, n\pi\, J^n(x) \sum\sum \frac{(n+2\lambda)!}{p!(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p \tag{19}$$

$$-\frac{1}{\sin n\pi} J^{-n}(x+y) = -\frac{(-1)^n}{\sin n\pi} J^n(x) \sum\sum \frac{(n+2\lambda)!}{p!(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p \tag{20}$$

$$K^n(x+y) = K^n(x) \sum_p \sum_\lambda \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p \tag{21}$$

oder für $\lambda < p$

$$K^n(x+y) = K^n(x) \sum_p \sum_\lambda \frac{(n+2\lambda)!}{p!(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p. \tag{22}$$

Ähnlich erhalten wir

$$K^{-n}(x+y) = K^{-n}(x) \sum_p \sum_\lambda \frac{(-n+2\lambda)!}{p!(-n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

oder

$$K^{-n}(x+y) = (-1)^n K^n(x) \sum_p \sum_\lambda \frac{(2\lambda-n)!}{p!(-n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

Auch die andern zwei Schläfli'schen Hülfsfunctionen, nämlich $S^n(x+y)$ und $T^n(x+y)$, lassen sich auf die vorhergehende Weise leicht ableiten.

Diese Functionen sind definiert durch die Gleichungen:

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n}{2}} \frac{(n - \lambda - 1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \qquad (\alpha)$$

und

$$S^n(x) = \pi \sum_{-n}^{+n} \lambda \left(J^n(x)\, K^\lambda(x) - K^n(x)\, J^\lambda(x) \right) \qquad (\beta)$$

Ausserdem gelten noch die Relationen:

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n S^n(x)$$

und

$$T^{-n}(x) = -(-1)^n T^n(x)$$

wenn n ganzzahlig, ferner

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, 0^n(x). \qquad (\gamma)$$

Es ist uns dadurch ein Mittel in die Hand gegeben $0^n(x)$ auf zwei Arten zu berechnen, erstens direkt und zweitens aus der Relation (γ).

Substituieren wir in (β) anstatt x den Ausdruck $x + y$, so erhalten wir

$$S^n(x + y) = \pi \sum_{-n}^{+n} \lambda \left(J^n(x+y)\, K^\lambda(x+y) - K^n(x+y)\, J^\lambda(x+y) \right) \qquad (\delta)$$

Setzen wir hierin die bezüglichen Ausdrücke für $J^n(x+y)$ und $K^n(x+y)$, beziehungsweise $J^\lambda(H + y)$ und $K^\lambda(H + y)$, so erhalten wir als allgemeinen Term

$$J^n(x) \sum p \sum \lambda \frac{(n + 2\lambda)!}{p!\,(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p \cdot K^\lambda(x) \sum p \sum \lambda \frac{(3\lambda)!}{p!\,(3\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

$$- K^n(x) \sum p \sum \lambda \frac{(n + 2\lambda)!}{p!\,(n+2\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p \cdot J^\lambda(x) \sum p \sum \lambda \frac{(3\lambda)!}{p!\,(3\lambda)-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

Da nun sämtliche Summen dieselben Laufzahlen besitzen, so können wir die vorstehende Formel auch so schreiben:

$$J^n(x)\; K^\lambda(x) \sum p \sum \lambda \frac{n + 2\lambda)!\,(3\lambda)!}{p!\,p!\,(n + 2\lambda - p)!\,(3\lambda - p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^{2p}$$

$$- K^n(x)\; J^\lambda(x) \sum p \sum \lambda \frac{(n + 2\lambda)!\,(3\lambda)!}{p!\,p!\,(n + 2\lambda - p)!\,(3\lambda - p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^{2p}.$$

oder

$$\left(J^n(x) K^\lambda(x) - K^n(x)\, J^\lambda(x)\right) \sum p \sum \lambda \frac{(n + 2\lambda)!\,(3\lambda)!}{p!\,p!\,(n+2\lambda-p)!\,(3\lambda-p)!} \left(\frac{y}{x}\right)^{2p}$$

Es ist daher

$$S^n(x+y) = K\sum_{-n}^{+n}\lambda\left\{(J^n(x)K^\lambda(x) - K^n(x)J^\lambda(x))\sum p\sum\lambda\frac{(n+2\lambda)!}{p!\,p!\,(3\lambda-p)!}\right.$$
$$\cdot\frac{(3\lambda)!}{(n+2\lambda-p)!}$$

oder schliesslich

$$S^n(x+y) = S^n(x)\sum p\sum\lambda\frac{(n+2\lambda)!\,(3\lambda)!}{p!\,p!\,(n+2\lambda-p)!\,(3\lambda-p)!}\left(\frac{y}{x}\right)^{2p} \quad (23)$$

Aus der Relation

$$T^n(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\frac{1}{\lambda}\left\{\overset{n+2\lambda}{J(x)} - \overset{n-2\lambda}{J(x)}\right\}$$

folgt:

$$T^n(x+y) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\frac{1}{\lambda}\left\{\overset{n+2\lambda}{J(x+y)} - \overset{n-2\lambda}{J(x+y)}\right\}$$

Hierin die bezüglichen Ausdrücke substituiert, gibt nach einer den frühern ganz analogen Rechnung

$$T^n(x+y) = T^n(x)\sum p\sum\lambda\binom{n+2\lambda}{p}\left(\frac{y}{x}\right)^p \quad (24)$$

und

$$T^{-n}(x+y) = (-1)^n T^n(x) - \sum p\sum\lambda\binom{2\lambda-n}{p}\left(\frac{y}{x}\right)^p \quad (24^a).$$

So viel im Anschluss an Lommels Methode.

§ 3. Herr Schläfli *) führt die Addition der Argumente bei Bessel'schen Functionen 1. und 2. Art auf eine sehr scharfsinnige aber etwas schwer verständliche Weise durch. Er definiert die Bessel'sche Function 1. Art

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n F\left(n, -\frac{1}{4}x^2\right),$$

wo, nach Schläfli, n gleich Null oder positiv ganz, die nämliche Bezeichnung jedoch auch anwendbar ist, wenn n beliebig, ferner ist F(a, x) allgemein eine hypergeometrische Reihe, deren erste zwei constante Glieder unendlich gross werden, während das Product derselben und des Argumentes eine endliche Variable bleibt, also

$$F(a, x) = \sum_{0}^{\infty} n\frac{x^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(a+n+1)}$$

*) Einige Bemerkungen zu Herrn Neumanns Untersuchungen über Bessel-sche Functionen. Mathem. Annalen. Bd. III, p. 134.

Nun findet Herr Schläfli

$$(x+y)^a F(a,(x+y)^2) = \sum_0^\infty n\, x^{a-n} F(a-n, x^2)\; y^n F(n, y^2)$$

und daraus, wenn a eine ganze Zahl ist

$$J^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; \overset{n-\lambda}{J(x)}\; \overset{\lambda}{J(y)}\ ^{*)} \qquad (25)$$

Ebenso für die Bessel'sche Function zweiter Art

$$O^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; \overset{n-\lambda}{O(x)}\; \overset{\lambda}{J(y)}\ ^{**)} \qquad (25^a).$$

§ 4. Eine elegantere und viel einfachere Methode führt J. H. Graf***) zu denselben Resultaten.

Herr Graf geht von der Form

$$J^n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\left(-\frac{N}{x},\, 0\right)\dagger)} e^{Hs}\, t^{-n-1} dt$$

aus; statt x der Ausdruck x + y eingesetzt, folgt:

$$J^n(x+y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\left(-\frac{N}{x+y},\, 0\right)} e^{(x+y)s}\; t^{-n-1} dt$$

wo y absolut < x
oder

$$J^n(x+y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\left(-\frac{N}{x+y},\, 0\right)} e^{xs} e^{ys} t^{-n-1} dt$$

Der Ausdruck e^{ys} lässt sich aber als eine Reihe darstellen, die ihrerseits nach Bessel'schen Functionen 1. Art fortschreitet. Diese Entwickelung wurde zum ersten Male gegeben von Herrn S. Schlömilch; ††)

---

*) ibidem p. 137.

**) ibidem p. 138.

***) Über die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen nebst einer Anwendung. Mathematische Annalen Bd. LIII. p. 136.

†) $(-\frac{N}{x}, 0)$ soll eine Schleife bedeuten, die im Westen des Horizonts beginnt, und im rechtläufigen Sinne um 0 herum wieder nach Westen geführt wird.

††) Über die Bessel'sche Function. Zeitschrift für Mathematik und Physik. II. Jahrgang, p. 137.

wir werden nun seinem Gedankengange, jedoch in etwas modificierter Gestalt folgen.

Es ist

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

folglich

$$e^{ys} = e^{\frac{y}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{yt}{2}} e^{-\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{t}}$$

Wir denken uns nun rechts beide Exponentialfunctionen entwickelt und nehmen die zwei entsprechenden Terme

$$\cdots\cdots + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+\lambda}}{(n+\lambda)!} t^{n+\lambda} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\lambda}}{\lambda} t^{\lambda-} + \cdots\cdots$$

Multiplicieren wir diese zwei Terme, so finden wir

$$(-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} t^{n} \tag{a}$$

Nun nehmen wir zwei andere Terme aus derselben Entwickelung u. z.

$$\cdots\cdots + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\lambda}}{\lambda!} t^{n} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots (-1)^{n+\lambda} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+\lambda}}{(n+\lambda)!} t^{-(n+\lambda)} + \cdots\cdots$$

Durch Multiplication, wie früher, erhält man:

$$(-1)^{n} \frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} t^{-n} \tag{b}$$

Fassen wir nun (a) und (b) zusammen, so ist

$$e^{ys} = J^{0}(y) + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, J^{\lambda}(y)\,[t^{\lambda} + (-1)^{\lambda} t^{-\lambda}]$$

was schliesslich nichts anderes ist, als

$$e^{ys} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda}\, J^{\lambda}(y)\, t^{\lambda} \tag{c}$$

Wir kehren nun nach dieser Abschweifung zur Formel

$$J^n(x+y) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\left(-\frac{N}{x+y}, 0\right)} e^{xs} e^{ys} t^{-n-1} dt$$

zurück.

Mit Benützung von (c) können wir letztere offenbar auch schreiben

$$J^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^\lambda(y) . \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\left(-\frac{N}{x}, 0\right)} e^{xs}\, t^{-(n-\lambda)-1} dt$$

es ist aber

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\left(-\frac{N}{x}, 0\right)} e^{xs}\, t^{(-n-\lambda)-1} dt = \overset{n-\lambda}{J}(x)$$

folglich

$$J^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^\lambda(y)\, \overset{n-\lambda}{J}(x) \tag{26}$$

Aus der Relation

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x)$$

folgt

$$J^{-n}(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, (-1)^\lambda J^\lambda(y)\, J^{\lambda-n}(x) \tag{26a}$$

was sich mit der Schläfli'schen Formel 23a deckt.*)

Die Vorteile der Graf'schen Methode werden erst klar, wenn man dieselbe auf die Hülfsfunctionen und durch die auf die Bessel-schen Functionen zweiter Art anwendet.

Die Schläfli'schen Hülfsfunctionen $S^n(x)$ und $T^n(x)$ sind definirt durch die Gleichungen

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} \tag{27}$$

und

$$T^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi \tag{28}$$

---

*) Vgl. auch Sonnine, Fonctions cylindriques. Mathem. Annalen Bd. XVI, p. 16.

oder als Summenformeln

$$S^n(x) = \sum_{0}^{<\frac{n}{2}} \lambda \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \quad (29)$$

und

$$T^n(x) = \sum_{1}^{\infty} \lambda \frac{1}{\lambda} \left\{ \overset{n+2\lambda}{J(x)} - \overset{n-2\lambda}{J(x)} \right\} \quad (30)$$

Hierbei gelten noch folgende, früher schon angeführte Relationen, aus denen man den Zusammenhang zwischen den einzelnen Functionen erkennt.

Für ein ganzzahliges n hat man

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n S^n(x) \quad (\alpha)$$

$$T^{-n}(x) = -(-1)^n T^n(x) \quad (\beta)$$

ferner

$$\overset{n+1}{S(x)} + \overset{n-1}{S(x)} = 4\,\overset{n}{O(x)} \quad (\gamma)$$

oder

$$O^n(x) = \frac{1}{4}\left(\overset{n+1}{S(x)} + \overset{n-1}{S(x)}\right) \quad (\delta)$$

Man könnte nun freilich die Graf'sche Substitutionsmethode direct auf $O^n(x)$ anwenden, was auch am Schlusse geschehen soll; dies empfiehlt sich jedoch aus dem Grunde nicht, weil man die Hülfsfunctionen dann doch extra berechnen müsste; es ist practischer, zuerst den Satz auf die Hülfsfunction $S^n(x)$ anzuwenden und dann mittelst der Relation (δ) $O^n(x)$ in die Betrachtung einzubeziehen.

Substituieren wir nun in die Integralform von $S^n(x)$ für x den Wert $x + y$, so erhalten wir:

$$S^n(x+y) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-(x+y)s} \left\{ t^n - \frac{(-1)^n}{t^n} \right\} \frac{dt}{t} \quad (31)$$

Nun ist

$$e^{-ys} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(-y)\, t^{\lambda},$$

wegen der bekannten Relation

$$J^{\lambda}(-y) = (-1)^{\lambda} J^{\lambda}(y)$$

kann man auch schreiben:

$$e^{-ys} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, (-1)^{\lambda} J^{\lambda}(y)\, t^{\lambda} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y)\, t^{-\lambda};$$

es ist somit

$$S^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, J^\lambda(y) \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^{n-\lambda} - \frac{(-1)^{n-\lambda}}{t^{n-\lambda}} \right) \frac{dt}{t} \qquad (32)$$

oder, da der Ausdruck hinter dem Integralzeichen nichts anderes ist, als

$$\overset{n-\lambda}{S}(x)$$

so gilt

$$S^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, J^\lambda(y) S^{n-\lambda}(x) \qquad (33)$$

und

$$S^{-n}(x+y) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, (-1)^\lambda J^\lambda(y) \overset{\lambda-n}{S}(x) \qquad (33^a)$$

Nun ist nach (δ)

$$O^n(x) = \frac{1}{4} \left(\overset{n+1}{S}(x) + \overset{n-1}{S}(x) \right)$$

folglich auch

$$O^n(x+y) = \frac{1}{4} \left(\overset{n+1}{S}(x+y) + \overset{n-1}{S}(x+y) \right)$$

Die Werte von S^{n+1} und S^{n-1} hineinsubstituiert, gibt:

$$O^n(x+y) = \frac{1}{4} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \overset{n+1-\lambda}{S}(x) \overset{\lambda}{J}(y) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \overset{n-1-\lambda}{S}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \right) \qquad (34)$$

oder

$$O^n(x+y) = \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, J^\lambda \left(\overset{(n-\lambda)+1}{S}(x) + \overset{(n-\lambda)-1}{S}(x) \right) \qquad (35)$$

Da nun aber offenbar

$$\frac{1}{4} \left(\overset{(n-\lambda)+1}{S}(x) + \overset{(n-\lambda)-1}{S}(x) \right) = \overset{u-\lambda}{O}(x)$$

so ist

$$O^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, J^\lambda(y) \overset{n-\lambda}{O}(H) \qquad (36)$$

und

$$O^{-n}(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda (-1)^\lambda \overset{\lambda}{J}(y) \overset{\lambda-n}{O}(x) \qquad (36^a)$$

Auf ganz analoge Weise erhält man aus (30) für die weniger wichtige Function $T^n(x)$

$$T^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu \overset{n-\mu}{T(x)} \overset{\mu}{J(y)} \tag{37}$$

und

$$T^n(x+y) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu (-1)^{\mu} \overset{\mu-n}{T(x)} \overset{\mu}{J(y)} \tag{37a)*}$$

Bevor wir diese Methode verlassen, wollen wir erstens noch zeigen, dass man $O^n(x+y)$ durch directe Substitution erhalten kann, und zweitens, wie man vermittelst der Graf'schen Substitution zu einer Doppelsummenformel gelangen kann, die manchmal recht bequem zu gebrauchen ist.

Es ist offenbar

$$O^n(x+y) = \int_0^{\frac{N}{x+y}} e^{-xs} e^{-ys} \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{(-1)^n}{t^n}\right) ds \tag{38}$$

Nun ist aber, wie früher gezeigt,

$$e^{-ys} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda (-1)^{\lambda} J^{\lambda}(y)\, t^{\lambda} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y)\, t^{-\lambda}$$

und folglich

$$O^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y) \int_0^{\frac{\pi}{x}} e^{-xs} \frac{1}{2}\left(t^{n-\lambda} - \frac{(-1)^{n-\lambda}}{t^{n-\lambda}}\right) ds$$

oder festgehalten, dass

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \frac{1}{2}\left(t^{n-\lambda} - \frac{(-1)^{n-\lambda}}{t^{n-\lambda}}\right) ds = \overset{n-\lambda}{O(x)}$$

erhalten wir:

$$O^n(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y)\, \overset{n-\lambda}{O(x)} \tag{39}$$

was mit der von den Herren Gegenbauer, Schläfli und Graf erhaltenen Formel (36) vollständig übereinstimmt.

§ 5. Wenn wir die Substitution $x + y$ statt auf das Integral,

---

*) Vgl. Graf, Mathem. Annal. Bd. 43. S. 141.

direct auf die Summenformel anwenden, so erhalten wir

$$J^n(x+y) = \sum_0^\infty \lambda (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \tag{40}$$

oder

$$J^n(x+y) = \sum_0^\infty \lambda\,(-1)^\lambda \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2\lambda} \frac{(x+y)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda!)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (x+y)^n \sum_0^\infty \lambda \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda (x+y)^{2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda!)}$$

Nun ist

$$(x+y)^{2\lambda} = \sum_0^\infty \varrho \binom{2\lambda}{\varrho} x^{2\lambda-\varrho} y^\varrho \quad \text{mod } y < x$$

folglich

$$J^n(x+y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \sum_0^\infty \lambda \sum_0^\infty \varrho (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\lambda x^{2\lambda-\varrho} y^\varrho}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \binom{2\lambda}{\varrho}$$

$$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \sum_0^\infty \lambda \sum_0^\infty \varrho\,(-1)^\lambda \frac{(2\lambda)!\;x^{2\lambda-\varrho} y^\varrho}{2^\lambda!\;\varrho!\;(2\lambda-\varrho)\;(n+\lambda)!\;\lambda!}$$

Nun ist offenbar

$$\lambda!\;2^\lambda = 2\,.\,4\,.\,6\,.\,8 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; 2\lambda = 2^{\lambda/2} \tag{α}$$

Multiplicieren wir Zähler und Nenner des letzterhaltenen Resultates mit $1\,.\,3\,.\,5 \ldots\ldots (2\lambda-1)$, so wird aus ($\alpha$) offenbar $(2\lambda)!$ und wir erhalten schliesslich

$$J^n(x+y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \sum_0^\infty \lambda \sum_0^\infty \varrho\,(-1)^\lambda \frac{1.3.5\ldots.(2\lambda-1)\,x^{2\lambda-\varrho} y^\varrho}{\varrho!\,(2\lambda-\varrho)!\,(n+\lambda)!} \tag{41}$$

Ähnliche Formeln kann man auch für $O^n(x)$, $S^n(x)$, T^n erhalten.

§ 6. Die Subtractionsformeln lassen sich selbstverständlich genau auf dieselbe Art ableiten, indem man einfach statt $x+y$ den Wert $x-y$ substituiert, doch gestaltet sich die Sache viel einfacher, wenn wir in den schon gefundenen Additionsformeln statt x den Wert $-y$ setzen.

Es gehen dann die von uns gefundenen Formeln

(6) (7) (8) (9) (12) (14) (22) (26) (33) (36) (37)

in die Ausdrücke über

$$J^m(z-h) = (-1)^m J^m(z) J^0(h) + \sum_0^\infty r \left\{ J^{m-r-1}(z)(-1)^m + (-1)^{m+r+1} J^{m+r+1}(z) \right\} J^{r+1}(h) \quad (42)$$

$$O^n(x-\xi) = (-1)^n J^n(x) O^0(\xi) + \sum_0^\infty r \left\{ (-1)^n J^{n-\varrho-1}(\xi) + (-1)^{n+\varrho+1} J^{n+\varrho-n}(\xi) \right\} O^{\varrho+1}(x) \quad (43)$$

$$J^n(x-y) = J^n(x) \sum p \sum \lambda \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{y}{x}\right)^p \quad (44)$$

für ein gerades p.

$$O^n(x-y) = O^n(x) \sum p \sum \lambda \frac{n}{4} \frac{(2\lambda - n + 1)!}{(2\lambda - n - p + 1)!\, p!} \left(\frac{y}{x}\right)^p \quad (45)$$

für ein gerades p.

$$J^n(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; J^\lambda(y)\, J^{n+\lambda}(x) \quad (46)$$

$$K^n(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; J^\lambda(y)\, K^{n+\lambda}(x) \quad (47)$$

$$T^n(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; J^\lambda(y)\, T^{n+\lambda}(x) \quad (48)$$

$$S^n(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; J^\lambda(y)\, S^{n+\lambda}(x) \quad (49)$$

$$O^n(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\; J^\lambda(y)\, O^{n+\lambda}(x) \quad (50)$$

Die Subtractionsformeln 46 — 50 lassen sich auch direct durch die oben angegebene Graf'sche Substitution finden, wofür der Einfachheit halber nur ein Beispiel angeführt sein mag.

Es ist

$$J^n(x-y) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{(x-y)s}\, t^{-n-1} dt \quad (51)$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{xs} e^{-ys} t^{-n-1} dt.$$

Nun ist nach früherem

$$e^{-ys} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^{\lambda}(y)\, t^{-\lambda}$$

folglich

$$J^{n}(x+y) = \int_{(\frac{N}{0},0)} \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^{\lambda}(x)\, e^{xs}\, t^{-n-\lambda-1}\, dt$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^{\lambda}(y) \int_{(\frac{N}{x},0)} e^{xs}\, t^{-(n+\lambda)-1}\, dt \tag{52}$$

Da aber offenbar

$$\int_{(\frac{N}{x},0)} e^{xs}\, t^{-(n+\lambda)-1}\, dt = \overset{n+\lambda}{J}(x)$$

so folgt

$$J^{n}(x-y) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, J^{\lambda}(y)\, \overset{n+\lambda}{J}(x) \tag{53}$$

was sich mit Formel (46) vollständig deckt. So viel über die Methode von Graf.

§ 7. Die Addition der Argumente bei Bessel'schen Functionen kann auch mittelst Bessel'scher Functionen gefunden werden, deren Argument die Entfernung zweier Punkte vorstellt.

Herr Neumann*) findet

$$J^{n}(R) = \sum_{0}^{\infty} n\ \varepsilon_n\, J^{n}(r)\, J^{n}(r_1) \cos n\,\Theta$$

wo

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\Theta}$$

und

ε_n eine Constante vorstellt, welche für $n = 0$ gleich ist 1, und für $n > 0$ gleich ist 2.

Setzt man $\Theta = \pi$, also $\cos\Theta = -1$, dann ist

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 + 2 r r_1} = r + r_1$$

und

$$J^{0}(r + r_1) = \sum_{0}^{\infty} n\ \varepsilon_n\, J^{n}(r)\, J^{n}(r_1) \cos n\,\pi$$

*) Theorie der Bessel'schen Functionen, Leipzig, 1867, p. 69.

Ist nun n gerade, dann gilt

$$J^0(r + r_1) = \sum_0^\infty n\ \varepsilon_n\ J^n(r)\ J^n(r_1)$$

für ein ungerades n folgt:

$$J^0(r + r_1) = -\sum_0^\infty n\ \varepsilon_n\ J^n(r)\ J^n(r_1)$$

oder für ein beliebiges n

$$J^0(r + r_1) = J^0(r)\ J^n(r_1) + 2\sum_0^\infty n (-1)^n\ J^n(r)\ J^n(r_1) \qquad (54)$$

Herr Graf findet für einen beliebigen Parameter

$$J^n(p) = q^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\ \overset{n+\lambda}{J(x)}\ J^\lambda(y)\ z^\lambda$$

wo

$$z \text{ abs} < \frac{y}{x}$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos\varphi}$$

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

und

$$q = \sqrt{\frac{x - yz}{x = \frac{y}{z}}}$$

Setzt man nun $\varphi = \pi$, also $\cos\varphi = -1$, dann wird

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = x + y$$

und

$$J^n(x + y) = q^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\ \overset{n+\lambda}{J(x)}\ J^\lambda(y).(-1)^\lambda$$

Nun wird aber für $\varphi = \pi$, $q = 1$ folglich auch $q^n =$ und mit Berücksichtigung von $(-1)^\lambda$ können wir auch schreiben

$$J^n(x + y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\ \overset{n-\lambda}{J(x)}\ J^\lambda(y) \qquad (55)$$

Würden wir in p anstatt $\varphi = \pi$ zu setzen $\varphi = 0$ gesetzt haben, so hätten wir

---

*) Vgl. die mehrfach citierte Arbeit von J. H. Graf. p. 143.

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} = x - y$$

also einen Ausdruck für

$$J^n(x - y)$$

erhalten.*)

Wir erwähnen noch eine interessante Ableitung Gegenbauers,**) auf deren nähere Begründung einzugehen uns jedoch der Raum nicht erlaubt.

Ist nämlich ϱ die Entfernung zweier Punkte d. h.

$$\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos\varphi}$$

dann gilt die Entwickelung

$$J^n(\varrho) = \varrho^n (n-1)!\,(\varrho_1\varrho_2)^{-n} \sum_0^{\infty} m\,(m+n)\, J^{m+n}(\varrho_1)\, J^{m+n}(\varrho_2)\, C^n_m(\cos\varphi)$$

wobei

$$C^n_m(\cos\varphi) = \frac{2^n(m+n-1)!}{n!\,(n-1)!}\left\{\cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{(m+n-1)}\frac{\cos^{n-1}\varphi}{2^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!\,(n+m-1)(m+n-2)}\frac{\cos^{n-4}\varphi}{2^4} - \text{etc.}\right\}$$

Setzt man nun $\varphi = \pi$, so erhält man

$$\varrho = \sqrt{(\varrho_1 + \varrho_2)^2} = \varrho_1 + \varrho_2$$

und nach einer etwas langwierigen Umrechnung

$$J(\varrho_1 + \varrho_2) = \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)^n \frac{2^{n+1}n!}{(2n)!} \sum_0^{\infty} m\,(-1)^m \frac{(n+2m-1)!}{n!} (m+n)\, J^{m+n}(\varrho_1)\, J^{m+n}(\varrho_2) \qquad (56)$$

Der Wert $\varphi = 0$ liefert

$$\varrho = \sqrt{(\varrho_1 - \varrho_2)^2} = \varrho_1 - \varrho_2$$

die Subtraction der Argumente, nämlich

$$J^n(\varrho_1 - \varrho_2) = -\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)^n \frac{2^{n+1}n!}{(2n)!} - \sum_0^{\infty} m\,(m-1)^n \frac{(n+2m-1)!}{n!} (m+n)\, J^{m+n}(\varrho_1)\, J^{m+n}(\varrho_2) \qquad (57)$$

Setzt man hingegen

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

*) Vgl. auch Sonnine, fonctions cylindriques. Mathem. Annalen Bd. XVI. p. 16.

**) Über die Bessel'schen Functionen. Sitzungsbericht der k. Wiener Akademie. Bd. LXX, II. Abt. März-Heft.

dann erhält man

$$\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_1^2}$$

und

$$J^n\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} = \left(\frac{\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2}}{\varrho_1\,\varrho_2}\right)^n \sum_0^\infty m\,(-1)^m \frac{(m+n-1)!}{n!}\,(2m+n)\,\overset{2m+n}{J}(\varrho_1)\,\overset{2m+n}{J}(\varrho_2) \tag{57}$$

Setzt man $\varrho_1 = \varrho_2 = x$, so erhält man

$$J^n(x\sqrt{2}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^n \sum_0^\infty m\,(-1)^m \frac{(m+n-1)!}{n!}\,(2m+n)\left(\overset{2m+n}{J}(x)\right)^2 \tag{58}$$

Dieselbe Substitution in Formel (56) ergiebt

$$J^n(2x) = \left(\frac{2}{x}\right)^n \frac{2^{n+1}\,n!}{(2n)!} \sum_0^\infty m(-1)^m \frac{(n+2m-1)!}{n!}\,(n+m)\left(\overset{m+n}{J}(x)\right)^2$$

Nun ist offenbar

$$\frac{2^{n+1}n!}{(2n)!} = \frac{2}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}$$

folglich erhalten wir schliesslich:

$$J^n(2x) = \frac{2^{n+1}}{x^n.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \sum_0^\infty m\,(-1)^m \frac{(n+2m-1)!}{n!}\,(n+m)\left(\overset{m+n}{J}(x)\right)^2 \tag{59}$$ *)

Als Beispiel für die Anwendbarkeit der Formel (58) möchten wir den Fall anführen, wo es sich darum handelt.

$J^n(\sin\varphi)$ zu berechnen $\varphi = 45^0$

Dann wird

$$J^n(\sin 45^0) = J^n\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \tag{60}$$

also in Formel (58) substituiert und $x = \frac{1}{2}$ gesetzt, giebt

$$J^n(\sin 45^0) = (2\sqrt{2})^n \sum_0^\infty m(-1)^m \frac{m+n-1}{n!}\,(2m+n)\left(\overset{2m+n}{J}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \tag{61}$$

---

*) Herr Lommel («Studien über die Bessel'schen Functionen» p. 21) findet

$$J^n(2x) = 2^n \sum_0^\infty p(-1)^p \frac{3^p}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2p}\, x^p\,\overset{n+p}{J}(x)$$

und

$$J^n(x\sqrt{2}) = 2^{\frac{n}{2}} \sum_0^\infty p(-1)^p \frac{x^p}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2p}\,\overset{n+p}{J}(x)$$

Ist nun n eine gerade Zahl, dann gilt

$$J^{2n}(\sin 45^0) = 2^{3n+1} \sum_0^\infty m\,(-1)^m \frac{(m+2n-1)!}{(2n)!}\,(m+n)\left(J^{2(m+n)}_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2 \quad (62)$$

oder nach Lommel*)

$$J^n(\sin 45^0) = 2^{\frac{n}{2}} \sum_0^\infty p\,(-1)^p \frac{2^{-2p}}{\varrho} J^{n+p}_{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (63)$$

Das Argument ist nun bekannt, und wenn auch der Parameter gegeben ist, so kann die Function aus den Tabellen berechnet werden.

§ 8. Alle bis jetzt gefundenen Additions- und Subtractionsformeln sind Reihen, die wiederum nach Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Wir fügen hier noch eine Methode an, mittelst deren man die Function der Summe oder Differenz der Argumente bei Bessel'schen Functionen darstellen kann und folgen dabei dem Gedankengang des Herrn Nicolas.**)

Setzt man in der bekannten Differenzialgleichung für die Bessel'sche Function anstatt

$$x^2 = 4z$$

so erhält man

$$z^2 \frac{d^2V_n}{dz^2} + (n+1)\frac{dV_n}{dz} - V_n = 0 \quad (\alpha)$$

Es sei nun

$$V_n = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\,U\,du \quad (\beta)$$

und es ist U zu bestimmen. Substituieren wir den Ausdruck (β) in die Differenzialgleichung (α), so erhalten wir

$$z^2 \frac{d^2V_n}{dz^2} + (1+n)\frac{dV_n}{dz} = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\,U\,du\left(\frac{z^2}{u^2} - \frac{1+n}{u} - 1\right)$$

Nun ist

$$\int_a^b \frac{d}{du}\left(e^{-\frac{z}{u}}\,U\right)du = \left(e^{-\frac{z}{u}}\,U\right)_a^b$$

$$= \int_a^b \frac{z}{u^2}\,e^{-\frac{z}{u}}\,U\,du + \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\,U\,\frac{d\,\mathrm{Log}\,U}{u}\,du$$

---

*) Vgl. vorige Seite, Anmerkung.

**) «Sur les fonctions de Fourrier.» Annales de l'école normale 1882, p. 1.

es folgt daher

$$z^2 \frac{d^2V_n}{dz^2} + (n+1) \frac{dV_n}{dz} - V =$$

$$= (e^{-\frac{z}{u}} U)_a^b - \int_a^b e^{-\frac{z}{u}} U du \left(\frac{d \operatorname{Log} U}{du} + \frac{1+n}{u} + 1 \right)$$

Es ist demnach die Gleichung (α) erfüllt, wenn

$$\left\{ e^{-\frac{z}{u}} U \right\}_a^b = 0$$

oder

$$\frac{d \operatorname{Log} u}{du} + \frac{1+n}{u} + 1 = 0$$

werden.

Wir integriren nun so, dass die Integrationsconstante = 0 wird und erhalten

$$U = n^{-(1+n)} e^{-n}$$

und

$$\left\{ e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} n^{-(1+n)} \right\}_a^b = 0$$

Diejenigen Werte von u also, die den Ausdruck

$$\frac{1}{e^{\frac{z}{u}} e^{u} n^{1+n}}$$

zum Verschwinden bringen, sind 0 und ∞.

Demnach ist schliesslich

$$V_n = \int_0^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} n^{-(1+n)} du \text{ *)} \tag{64}$$

Entwickelt man nun in (64) den Ausdruck $e^{-\frac{z}{n}}$, so erhält man

$$V = \sum_0^\infty p\, (-1)^{p'} \frac{z^p}{p!} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+n+p)} du \tag{65}$$

Es sei nun

$$\int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+n)} du = A(n)$$

*) Herr Schläfli findet in den Annali di Matematica Serie II^a, Tomo VI für $V_n = \int_0^\infty e^{-(zu+\frac{1}{u})} u^{n-1} du$; man erhält diese Formel aus der Gleichung (64), wenn man darin $\frac{1}{u}$ anstatt u setzt.

dann ist der Integralausdruck 65 $A(n+p)$ und es gilt

$$A(n+p) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-1-n-p} \, du = -\left\{ \frac{e^{-u} u^{-n-p}}{n+p} \right\}_{\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{n+p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-n-p} \, du \qquad (66)$$

Da nun der eingeklammerte Ausdruck für die Grenzen $\infty - \infty$ verschwindet, so ist

$$A(n+p) = -\frac{A(n-p-1)}{n+p}$$

und wir können folglich folgende Recursionsscala für die Function A aufstellen:

$$\begin{aligned} A(n+p) &= -\frac{A(n+p-1)}{n+p} \\ A(n+p-1) &= -\frac{A(n+p-2)}{n+p-1} \\ &\vdots \\ A(n+1) &= -\frac{A(n)}{n+1} \end{aligned}$$

und daher allgemein

$$A(n+p) = \frac{(-1)^p A(n)}{(n+1)(n+2)\ldots.(n+p)} \qquad (67)$$

Diese Formel gestaltet sich auf der rechten Seite etwas bequemer, wenn man Zähler und Nenner mit 1. 2. 3. . . . n multiplicirt; es wird dann

$$A(n+p) = \frac{(-1)^p A(n)\, 1.\, 2.\, 3.\ldots.\, n}{1.\, 2.\, 3.\ldots.\, n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p)}$$

oder

$$A(n+p) = \frac{(-1)^p A(n)\, n!}{(n+p)!} \qquad (68)$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$A(n-p) = \frac{A(n)\, n!}{(-1)^p\,(n-p)!}$$

Wir verlassen hiermit das Capitel der Addition und Subtraction von Argumenten bei Bessel'schen Functionen und wenden uns zur

II.

Multiplication und Division der Argumente bei Bessel'schen Functionen.

§ 1. Um die Multiplication und Division der Argumente bei Bessel'schen Functionen durchzuführen, giebt es zwei Methoden: die eine directe, indem man versucht, brauchbare Ausdrücke für $J^n(xy)$ und $J^n\left(\frac{x}{y}\right)$ herzustellen, die andere, indirecte, indem man die schon im vorigen Abschnitt gewonnenen Summenformeln benützt und sie mittelst passender Substitutionen in Productformeln überführt.

Wir werden in folgendem beide Methoden promiscue anwenden.

Herr Neumann*) giebt unter den Beispielen der Entwickelung einer Function nach Bessel'schen Functionen folgende Entwickelung an:

$$J^0(c + z) = J^0(c)\,J^0(z) - 2\,J^1(c)\,J^1(z) + 2\,J^2(c)\,J^2(z) - \ldots.$$

Setzt man nun in dieser Reihe für

$$c = (y - 1)\,z$$

so erhält man eine Multiplicationsformel für $J^0(yz)$, nämlich

$$J^0(yz) = J^0[z(y - 1)]\,J^0(z) - 2\,J^1[z(y - 1)]\,J^1(z) + \text{etc.} \qquad (1)$$

Wir werden später sehen, dass diese specielle Entwickelung auf Grund der Neumann'schen Formel sich auch auf Grund einer ganz allgemeinen Entwickelung herleiten lässt.

Wir wollen nun die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln vermittelst der Substitutionen

$$y = (y - 1)\,x$$

und

$$y = \left(\frac{1}{y} - 1\right)x$$

in Formeln für Producte und Quotienten der Argumente verwandeln.

§ 2. Die Formel (6^a) verwandelt sich in

$$J^m(zh) = J^m\{(h-1)z\}\,J^0(z) + \sum_0^\infty r\left\{J^{m-r-1}((h-1)z) + (-1)^{r+1}\,J^{m+r+1}((h-1)z)\right\}J^{r+1}(z) \qquad (2)$$

ferner die Formel (8) in

$$O^n(x\xi) = J^n\{(\xi - 1)x\}\,O^0(x) + \sum_0^\infty \varrho\left\{J^{n-\varrho-1}\{(\xi-1)x\} + (-1)^{\varrho+1}\,J^{n+\varrho+1}\{(\xi-1)x\}\right\}O^{\varrho+1}(x) \qquad (3)$$

*) Theorie der Bessel'schen Functionen p. 40.

Der Ausdruck (12) geht über in

$$J^n(xy) = J^n(x) \sum_0^\infty p \sum_0^\infty \lambda \binom{n + 2\lambda}{p} \left(\frac{(y-1)x}{x}\right)^p$$

oder

$$J^n(xy) = J^n(x) \sum_0^\infty p \sum_0^\infty \lambda \binom{n + 2\lambda}{p} (y-1)^p \tag{4}$$

ebenso

$$O^n(xy) = O^n(x) \sum_0^\infty p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \frac{n}{4} \frac{(2\lambda - n + 1)!}{p!\,(2\lambda - n - p + 1)!} \left(\frac{(y-1)x}{x}\right)^p$$

oder

$$O^n(xy) = O^n(x) \sum_0^\infty p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \frac{n}{4} \frac{(2\lambda - n + 1)!}{(2\lambda - n - p + 1)!\,p!} (y-1)^p \tag{5}$$

Die Formel (22) geht über in

$$K^n(xy) = K^n(x) \sum_0^\infty p \sum_0^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \frac{(n + 2\lambda)!}{p!\,(n + 2\lambda - p)!} (y-1)^p \tag{6}$$

Für $S^n(xy)$ erhalten wir

$$S^n(xy) = S^n(x) \sum p \sum \lambda \frac{(n + 2\lambda)!\,(3\lambda)!}{p!\,p!\,(n + 2\lambda - p)!\,(3\lambda - p)!} (y-1)^{2p} \tag{7}$$

und $T^n(x + y)$ wird zu

$$T^n(xy) = T^n(x) \sum p \sum \lambda \binom{n + 2\lambda}{p} (y-1)^p \tag{8}$$

Die Graf'schen Formeln verwandeln sich successive in

$$J^n(xy) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^\lambda((y-1)x)\, \overset{n-\lambda}{J}(x) \tag{9}$$

ferner

$$S^n(xy) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^\lambda\{(y-1)x\}\, \overset{n+\lambda}{J}(x) \tag{10}$$

dann

$$O^n(xy) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^\lambda((y-1)x)\, \overset{n-\lambda}{O}(x) \tag{11}$$

und schliesslich

$$T^{n}(xy) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}((y-1)x)\, \overset{n-\lambda}{T}(x) \tag{12}$$

Die Nicolas'sche Formel für A(np) lautet

$$A(np) = \frac{(-1)^{(p-1)n} A(n)\, n!}{(np)!} \tag{13}$$

Es bleibt uns schliesslich noch die Gegenbauer'sche Formel übrig.

Dieselbe wird lauten

$$J^{n}(\varrho_1\varrho_2) = \left(\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_2-1)}\right)^{n} \frac{2^{n+1} n!}{(2n)!} \sum_{0}^{\infty} \lambda\, (-1)^{\lambda} \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!}$$

$$(\lambda+n)\,.\, \overset{\lambda+n}{J}(\varrho_1).\ \overset{\lambda+n}{J}((\varrho_2-1)\,\varrho_1).$$

oder

$$J^{n}(\varrho_1\varrho_2) = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1\,(\varrho_2\,.\,1)}\right)^{n} \frac{\overset{n+1}{2n!}}{(2n)!} \sum n\ (-1)^{\lambda} \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!} (\lambda+n)$$

$$\overset{\lambda+n}{J}(\varrho_1)\ .\ \overset{\lambda+n}{J}((\varrho_2-1)\varrho_1) \tag{14}$$

§ 3. Es lässt sich endlich auf dieselbe Weise mittelst der Substitution

$$y = \left(\frac{1}{y} - 1\right) x$$

die Division der Argumente bei Bessel'schen Functionen herstellen; die vorhin schon angeführten Formeln werden der Reihe nach lauten:

$$J^{m}\left(\frac{z}{h}\right) = J^{m}\left((1-h)\,\frac{z}{h}\right) J^{0}(z) + \sum_{0}^{\infty} r \left[\overset{m-r-1}{J}\left\{(1-h)\,\frac{z}{h}\right\} + (-1)^{r+1}\right.$$

$$\left.\overset{m+r+1}{J}\left\{(1-h)\,\frac{z}{h}\right\}\right] \overset{r+1}{J}(z) \tag{15}$$

$$O^{n}\left(\frac{x}{\xi}\right) = J^{n}\left\{(1-\xi)\,\frac{x}{\xi}\right\} O^{n}(x) + \sum_{0}^{\infty} \varrho \left[\overset{n-\varrho-1}{J}\left\{(1-\xi)\,\frac{x}{\xi}\right\} + (-1)^{\varrho+1}\right.$$

$$\left.\overset{n+\varrho+1}{J}\left\{(1-\xi)\,\frac{x}{\xi}\right\}\right] \overset{\varrho+1}{O}(x) \tag{16}$$

$$J^{n}\left(\frac{x}{y}\right) = J^{n}(x) \sum_{0}^{\infty} p \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{(1-y)\,\frac{x}{y}}{x}\right)^{p}$$

oder

$$J^{n}\left(\frac{x}{y}\right) = J^{n}(x) \sum_{0}^{\infty} p \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \binom{n+2\lambda}{p} \left(\frac{1-y}{y}\right)^{p} \tag{17}$$

$$O^n\left(\frac{x}{y}\right) = O^n(x)\sum_p\sum_\lambda \frac{n}{4}\frac{(2\lambda-n+1)!}{p!(2\lambda-n-p+1)!}\left(\frac{1-y}{y}\right)^p \quad (18)$$

$$K^n\left(\frac{x}{y}\right) = K^n(x)\sum_p\sum_\lambda \frac{(n+2\lambda)!}{p!(n+2\lambda-p)!}\left(\frac{1-y}{y}\right)^p \quad (19)$$

$$S^n\left(\frac{x}{y}\right) = S^n(x)\sum_p\sum_\lambda \frac{(n+2\lambda)!(3\lambda)!}{p!p!(n+2\lambda-p)!(3\lambda-p)!}\left(\frac{1-y}{y}\right)^p \quad (20)$$

$$T^n\left(\frac{x}{y}\right) = T^n(x)\sum_p\sum_\lambda \binom{n+2\lambda}{p}\left(\frac{1-y}{y}\right)^p \quad (21)$$

$$J^n\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda\left((1-y)\frac{x}{y}\right) \overset{n-\lambda}{J}(x) \quad (22)$$

$$S^n\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda\left((1-y)\frac{x}{y}\right) \overset{n-\lambda}{S}(x) \quad (23)$$

$$O^n\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda\left((1-y)\frac{x}{y}\right) \overset{n-\lambda}{O}(x) \quad (24)$$

$$T^n\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda\left((1-y)\frac{x}{y}\right) \overset{n-\lambda}{T}(x) \quad (25)$$

Die aus den Graf'schen Formeln gewonnenen Multiplications- und Divisionsformeln eignen sich aus dem Grunde ausgezeichnet zur Berechnung der Producte und Quotienten der Argumente von Bessel'schen Functionen, weil wir nur ein einziges Mal

$$J^\lambda((y-1)x)$$

beziehungsweise

$$J^\lambda\left((1-y)\frac{x}{y}\right)$$

zu berechnen brauchen und dann ohne weiteres die anderen Functionen O, S, T aufstellen können, da diese ja nur mit dem einfachen Argument x vorkommen.

Eine sehr einfache und bequeme Formel für $J^n(xy)$ lässt sich direct erhalten.

Ausgehend von

$$J^n(x) = \sum_0^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!(n+\lambda)!}$$

erhalten wir

$$J^n(xy) = \sum_0^\infty \lambda\, (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{xy}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

oder

$$J^n(xy) = \sum_0^\infty \lambda\, (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda!}\, y^{n+2\lambda}$$

und dies ist gleich

$$J^n(xy) = J^n(x)\, y^n \sum_0^\infty \lambda\, y^{2\lambda} \tag{26}$$

oder

$$J^n(xy) = y^n J^n(x)\, (1 + y^2 + y^4 + y^6 + \ldots)\ y \text{ abs} > 1. \tag{27}$$

Ebenso erhalten wir für

$$J^n\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_0^\infty \lambda\, (-1)_\lambda \frac{\left(\frac{\frac{x}{y}}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} =$$

$$= \sum_0^\infty \lambda\, (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} =$$

$$= \sum_0^\infty \lambda\, (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\, y^{-n-2\lambda} =$$

$$= J^n(x)\, y^{-n} \sum_0^\infty \lambda\, y^{-2\lambda} \tag{28}$$

oder

$$J^n\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y^n} J^n(x) \left(1 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4} + \cdots\right) y \text{ abs} > 1. \tag{29}$$

Die Formel (27) lässt sich auch sehr leicht für ein Argument von 3, 4, 5, 6 . . . p Factoren umgestalten; wir erhalten dann:

$$J^n(xyz\ldots) = J^n(x)\, (yz\ldots)^n \sum_0^\infty \lambda\, (yz\ldots)^{2\lambda}\quad yz\ldots \text{ abs} < 1. \tag{30}$$

§ 4. Wir fügen noch eine Multiplicationsformel an, die sich durch ihre Einfachheit auszeichnet und folgen dabei dem Gedankengange des Herrn Lommel*)

*) Studien über die Bessel'schen Functionen. p. 21 u. ff.

Wenn wir die Function

$$z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{z})$$

nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln, so erhalten wir, h als Increment aufgefasst,

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum_{0}^{n} p \frac{h^p}{p!} \frac{d^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{z})\right)}{d z^p}$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}\left((z+\Theta h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{n}(\sqrt{z+\Theta h})\right)}{dz^{n+1}}$$

wobei Θ ein echter positiver Bruch ist.

Nun ist aber

$$\frac{d^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{n}(\sqrt{z})\right)}{d z^p} = \left(-\frac{1}{2}\right)^p . z^{-\frac{\nu+p}{2}} \overset{\nu+p}{J}(\sqrt{z})$$

folglich

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum_{0}^{n} p \, (-1)^p \frac{h^p}{2.4.6\ldots 2p} \cdot z^{\frac{-\nu+p}{2}} \overset{\nu+p}{J}(\sqrt{z})$$

$$+ (-1)^{n+1} . \frac{h^{n+1}}{2.4.6\ldots 2(n+1)} (z+\Theta h)^{-\frac{\nu+n+1}{2}} \overset{\nu+n+1}{J}(\sqrt{(z+\Theta h)}) \qquad (\alpha)$$

Setzt man nun in dieser Reihe für z die Grösse z^2 und für h die Grösse kz^2 und lässt das zweite Glied weg, was offenbar geschehen darf, wenn man die Reihe von der Beschränkung befreit bis n zu gehen, sondern sie sich ins Unendliche fortgesetzt denkt, so erhält man

$$J^{\nu}(z\sqrt{1+k}) = (1+k)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{0}^{\infty} p \, (-1^p) \frac{(kz)^p}{2.4\ldots 2p} \overset{\nu+p}{J}(z);$$

wenn man nun anstatt $1+k$ die Grösse λ^2 setzt, so erhält man

$$J^{\nu}(\lambda z) = \lambda^{\nu} \sum_{0}^{\infty} p \, (-1)^p \frac{(\lambda^2-1)^p}{2.4\ldots 2p} z^p \overset{\nu+p}{J}(z)$$

oder in unsere gewöhnliche Bezeichnung umgesetzt

$$J^{n}(xy) = x^{n} \sum_{0}^{\infty} \lambda \, (-1)^{\lambda} \frac{(x^2-1)^{\lambda}}{2.4.6\ldots 2\lambda} y^{\lambda} \overset{n+\lambda}{J}(x) \qquad (31)$$

Wir wollen uns nicht länger bei diesem Abschnitt aufhalten, da die bis jetzt angeführten Formeln für jeden Fall genügen dürften

umsomehr, als man in der Praxis sehr selten in die Lage kommen wird mit Producten von Argumenten zu operiren.

§ 5. Bevor wir uns jedoch zu dem sehr wichtigen Abschnitt der Multiplication und Division von den Bessel'schen Functionen selbst wenden, wollen wir noch einige Beispiele anführen, aus denen man ersehen wird, wie sich die Ausdrücke gestalten werden, wenn das Argument der Bessel'schen Function eine Potenz oder eine Wurzel ist.

Setzen wir z. B. in der von uns gefundenen Formel (31) dieses Abschnittes $x = y$, so erhalten wir

$$J^n(x^2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda(x\,(x-1))\, \overset{n-\lambda}{J}(x) \qquad (32)$$

Die Formel (14) geht über in

$$J^n(\varrho^2) = \left(\frac{\varrho^2}{\varrho^2-\varrho}\right)^n \frac{2^{n+1}n!}{(2n)!} \sum_{0}^{\infty}{}_\lambda (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!} (\lambda+n)\, \overset{\lambda+n}{J}(\varrho)\, \overset{\lambda+n}{J}(\varrho^2-\varrho) \qquad (33)$$

oder

$$J^n(\varrho^2) = \left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\right)^n \frac{2^{n+1}n!}{(2n)!} \sum_{0}^{\infty}{}_\lambda (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!} (\lambda+n)\, \overset{\lambda+n}{J}(\varrho)\, \overset{\lambda+n}{J}(\varrho^2-\varrho) \qquad (33^a)$$

Setzen wir in (17) $x = y$, so erhalten wir einen interessanten Specialfall, wie man die Bessel'sche Function vom Argument 1 in eine Reihe entwickeln kann, die nach einem beliebigen Argument fortschreitet.

Es wird dann

$$J^n(1) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda(1-x)\, \overset{n-\lambda}{J}(x) \qquad (34)$$

und

$$O^n(1) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, J^\lambda(1-x)\, \overset{n-\lambda}{J}(x)\,; \qquad (35)$$

für $n = 0$ ergeben sich schliesslich die Specialfälle

$$J^0(1) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda\, (-1)^\lambda\, J^\lambda(1-x)\, J^\lambda(x) \qquad (36)$$

und

$$0^0(1) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda\ (-1)^\lambda\ J^\lambda(1-x)\ 0^\lambda(x) \tag{37}$$

Setzen wir in der Formel (31) dieses Abschnittes im Argument $x = y = z =$ etc., so erhalten wir:

$$J^n(x^p) = J^n(x)\ (x^{p-1})^n \sum_0^\infty \lambda\ (x^{p-1})^{2\lambda}$$

oder

$$J^n(x^p) = J^n(x)\ x^{n(p-1)} \sum_0^\infty \lambda\ x^{2\lambda(p-1)} \tag{38}$$

$$x^p \text{ abs} < 1$$

Wenn wir in Formel (56) des vorigen Abschnittes $\varrho_1 = \varrho_2$ setzen, so erhalten wir

$$J^n(2\varrho) = \left(\frac{2\varrho}{\varrho^2}\right)^n \frac{2^{n+1}\ n!}{(2n)!} \sum_0^\infty \lambda\ (-1)^\lambda \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!}\ (n+\lambda)\,.\left(\overset{n+\lambda}{J}(\varrho)\right)^2$$

oder

$$J^n(2\varrho) = \varrho^{-n} \frac{2^{n+1}\ n!}{(2n)!} \sum_0^\infty \lambda\ (-1)^\lambda \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!}\ (n+\lambda) \left(\overset{n+\lambda}{J}(\varrho)\right)^2 \tag{39}$$

Ist nun $2\varrho = x$, also $\varrho = \frac{x}{2}$, so erhalten wir ein Mittel, ein einfaches Argument durch eine Reihe auszudrücken, welche nach Bessel'schen Functionen von halben Argumenten fortschreitet; es ist dann

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{2^{2n+1}\ n!}{(2n)!} \sum_0^\infty \lambda\ (-1)^\lambda \frac{(2n+\lambda-1)!}{\lambda!}\ (n+\lambda) \left(J^{n+\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

oder

$$J^n(x) = x^{-n} \frac{2^{3n+1}\ n!}{(2n)!} \sum_0^\infty \lambda\ (-1)^\lambda \frac{(2n+\lambda-1)!}{\lambda!}\ (n+\lambda) \left(J^{n+\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \tag{40}$$

Nun ist aber nach Neumann*)

$$(J^n(x))^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J(2x \sin\omega)\, d\omega$$

folglich auch

$$\left(\overset{n+\lambda}{J}(x)\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \overset{2(n+\lambda)}{J}(2x \sin\omega)\, d\omega$$

---

*) Theorie der Bessel'schen Functionen. p. 70.

und es lassen sich daher die Formeln (39) und (40) folgenderweise schreiben

$$J^n(2\varrho) = \varrho^{-n} \frac{\overset{2n+1}{J} \; n!}{\pi(2n)!} \sum_0^\infty \lambda \, (-1)^\lambda \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!} (n+\lambda) \int_0^\pi \overset{2(n+\lambda)}{J}(2\varrho \sin\omega)\, d\omega \qquad (41)$$

und

$$J^n(x) = x^{-n} \frac{\overset{3n+1}{J} \; n!}{\pi(2n)!} \sum_0^\infty \lambda \, (-1)^\lambda \frac{(\lambda+2n-1)!}{\lambda!} (n+\lambda) \int_0^\pi \overset{2(n+\lambda)}{J}(x \sin\omega)\, d\omega \qquad (42)$$

Setzt man in der von Herrn Graf*) gefundenen Formel

$$q^{-n} J^n(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \overset{n+\lambda}{J}(x) \, J^\lambda(y) \, z^\lambda$$

wo

$$z \text{ abs} < \frac{y}{x}$$

ferner

$$p^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi$$

dann

$$q^2 = \frac{x - yz}{x - \dfrac{y}{x}}$$

und schliesslich

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

anstatt φ den Wert $\frac{\pi}{2}$, dann wird

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \ \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

und

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir erhalten

$$J^n(\sqrt{x^2+y^2}) = \left(\frac{x-yi}{x+yi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, (-1)^\lambda \, \overset{n+\lambda}{J}(x) \, J^\lambda(y) \qquad (43)$$

*) Über die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen, nebst einer Anwendung. Mathem. Annalen Bd. LIII, p. 143.

Ist endlich

$$x = y$$

so erhalten wir einen anderen Ausdruck für den schon im vorigen Abschnitt erwähnten Ausdruck von $J(x\sqrt{2})$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} J^{n}(x\sqrt{2}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \overset{n+\lambda}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \\ &= \frac{(1-i)^{n}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \overset{n+\lambda}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

III.

Multiplication und Division von Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art.

§ 1. Wir gelangen jetzt zu einem der wichtigsten Probleme, dessen zweckmässige Lösung der Anwendbarkeit der Bessel'schen Functionen innerhalb des Calcüls einen sehr grossen Spielraum verleihen dürfte.

Wir meinen nämlich die Multiplication und Division der Bessel'schen Functionen.

An Versuchen, dieses Problem zu lösen, hat es natürlich nicht gefehlt; doch besitzen die meisten Resultate den Fehler, dass sie entweder geschlossene Ausdrücke vorstellen, wie z. B. diejenigen des Herrn Schläfli*), oder dass sie nach ganz anderen, wie nach Bessel'schen Functionen, fortschreiten, wie z. B. bei Herrn Schönholzer**).

Soll nun die Lösung des vorliegenden Problems eine allgemeine sein, so muss sie vor allem folgende zwei Grundbedingungen erfüllen:

1. muss das gefundene Product eine Reihe vorstellen, die ihrerseits wieder nach Bessel'schen Functionen fortschreitet,
2. muss die Möglichkeit gegeben sein, alle Bessel'schen Functionen zu multipliciren.

Um eine solche Lösung zu finden, die einen möglichst grossen Anspruch auf Allgemeinheit machen würde, folgen wir am besten in

---

*) Schläfli, Einige Bemerkungen zu Herrn Neumanns Untersuchungen über Bessel'sche Functionen. Mathem. Annalen Bd. XVI, p. 142.

**) Schönholzer, Über die Auswertung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. Bern, 1877, p. 15.

grossen Zügen derjenigen Methode, die Herr F. Neumann für die Multiplication der Kugelfunctionen anwendet*), indem wir eine Differenzialgleichung vierten Grades aufstellen, welcher ein Product zweier Bessel'scher Functionen genügt, und dann diese Differenzialgleichung so integrieren, dass die als Resultat gewonnene Reihe wiederum nach Bessel'schen Functionen fortschreitet.

Wir haben diese Arbeit in extenso bereits fertig; sie ist jedoch heute noch nicht in demjenigen Stadium der Abgerundetheit, um sich schon jetzt zur Veröffentlichung zu eignen; wir behalten uns daher deren Publication für einen späteren Zeitpunkt ausdrücklich vor und wenden uns jetzt, gleichwie in den früheren Abschnitten, zu den uns bereits vorliegenden Leistungen.

§ 2. Für ein Product zweier Bessel'scher Functionen erster Art und verschiedenen Parameters findet Herr Schläfli**) folgende, ziemlich unbequeme Formel:

$$J^m(x)\, J^n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2x \cos\varphi) \cos\left\{(m-n)\varphi\right\} d\varphi$$

Setzt man in dieser Formel

$$m = n$$

so erhält man

$$J^m(x) \,.\, J^m(x) = \left(J^m(x)\right)^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2m}(2x \cos\varphi)\, d\varphi$$

Diese von Schläfli gefundene Formel dürfte sich schon aus dem Grunde für den praktischen Gebrauch nicht eignen, weil wir im Resultat ein ganz neues Argument erhalten, welches erst berechnet werden muss.

§ 3. Eine etwas bessere Form erhält Schönholzer***) auf folgende Weise: Die Bessel'sche Function erster Art sei durch die Gleichung definirt:

$$J^a(x) = \sum_0^{\infty} n\, (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2n}}{n!\, \Gamma(a+n+1)}$$

*) Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig, 1878, p. 99.

**) a. a. O., p. 143.

***) Über die Auswertung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. Bern, 1877, p. 15 ff.

Wenn man dieselbe mit

$$J^b(x) = \sum_0^\infty r\,(-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,\Gamma(b+r+1)}$$

multiplicirt, erhält man eine neue unendliche Reihe, die wieder nach steigenden Potenzen von x geordnet werden kann. Die Exponenten sind von der Form $a+b+2\lambda$, wo λ alle Werte der ganzen positiven Zahlen durchläuft.

Um das allgemeine Glied des Productes zu erhalten, hält man λ zuerst bei irgend einem bestimmten Werte fest und multiplicirt den Term

$$\frac{(-1)^{\lambda-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2(\lambda-2)}}{(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)}$$

der ersten Reihe mit dem allgemeinen Term

$$\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,\Gamma(b+r+1)}$$

der zweiten Reihe.

Das Product dieser beiden Ausdrücke ist offenbar

$$(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{r!\,(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

und daher das allgemeine Glied des Productes zweier Bessel'scher Functionen erster Art verschiedenen Argumentes gleich

$$J^a(x)\,J^b(x) = \sum_0^\lambda r \frac{(-1)^\lambda\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{r!\,(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

Man multiplicirt nun Zähler und Nenner mit

$$\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)$$

und kann dann schreiben

$$J^a(x)\,J^b(x) = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}$$

$$\sum_0^\lambda r \frac{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}{r!\,(r-\lambda)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda!}{r!\,(\lambda - r)!} = \binom{\lambda}{r}$$

Wir können demnach schreiben:

$$J^a(x)\,J^b(x) = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{b+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}$$

$$\sum_0^\lambda {}_r \binom{\lambda}{r} \frac{\Gamma(a+b+\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

Den Ausdruck

$$\frac{\Gamma(a+b+\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

können wir nach der Formel

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(n-a+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(-1,\,0)} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx$$

berechnen.

Es ist dieser Formel zufolge

$$\frac{\Gamma(a+b+\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(-1,\,0)} t^{r-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+\lambda}\,dt$$

folglich

$$J^a(x)\,J^b(x) = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)} \cdot \frac{1}{2i\pi}\int_{(-1,\,0)} t^{-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+\lambda}\,dt$$

$$\sum_0^\lambda {}_r \binom{\lambda}{r} t^r$$

Nun ist aber

$$\sum_0^\lambda {}_r \binom{\lambda}{r} t^r = (1+t)^\lambda$$

es folgt daraus

$$J^a(x)\,J^b(x) = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,(a+b+\lambda)!} \cdot \frac{1}{2i\pi}\int_{(-1,\,0)} t^{-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+2\lambda}\,dt$$

Dieses Integral kann man aber wiederum durch Gammafunctionen darstellen und zwar ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(-1,0)} t^{-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+2\lambda}\, dt = \frac{\Gamma(a+b+2\lambda-1)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)}$$

daher das allgemeine Glied des Productes gleich

$$\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,(a+b+\lambda)!}\;\frac{\Gamma(a+b+2\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)}$$

und so erhält Schönbolzer (p. 15)

$$J^a(x)\,J^b(x) = \sum_0^{\infty}\lambda\;\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}\Gamma(a+b+2\lambda+1)}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)} \quad (\alpha)$$

Diese Formel lässt sich ziemlich vereinfachen und sich zugleich in eine solche verwandeln, die selbst nach Bessel'schen Functionen fortschreitet.

Es ist

$$\sum_0^{\infty}\lambda\,(-1)^{\lambda}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda)} = J^{a+b}(x)$$

ferner

$$\Gamma(a+b+2\lambda+1) = (a+b+2\lambda)\,\Gamma(a+b+2\lambda)$$

so dass wir die Formel (α) auch schreiben können

$$J^a(x)\,J^b(x) = J^{a+b}(x)\sum_0^{\infty}\lambda\,(a+b+2\lambda)\,\frac{\Gamma(a+b+2\lambda)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)} \quad (1)$$

Nun ist aber

$$(a+b+2\lambda)\,J^{a+b}(x) = x\,\frac{d}{dx}\,J^{a+b}(x)$$

demnach

$$J^a(x)\,J^b(x) = \sum_0^{\infty}\lambda\; x\frac{d}{dx}\,J^{a+b}(x)\,\frac{(a+b+2\lambda-1)!}{(a+\lambda)!\,(b+\lambda)!}$$

$$= x\,\frac{d}{dx}\,J^{a+b}(x)\sum_0^{\infty}\lambda\,\frac{(a+b+2\lambda-1)!}{(a+\lambda)!\,(b+\lambda)!} \quad (2)$$

Den Ausdruck

$$\frac{(a+b+2\lambda-1)}{(a+\lambda)!\,(b+\lambda)!}$$

kann man auch so schreiben

$$\frac{\lambda!\,(a+b+\lambda)!\,(a+b+\lambda+1)\ldots\ldots(a+b+2\lambda-1)}{\lambda!\,(a+\lambda)!\,(b+\lambda)!}$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda!\,(a+b+\lambda)!}{(a+\lambda)!\,(b+\lambda)!} = F(-a, -b, \lambda, 1)$$

wo das Symbol F die bekannte hypergeometrische Reihe bezeichnet.

Ferner kann man den Ausdruck

$$\frac{(a+b+\lambda+1)\ldots\ldots(a+b+2\lambda-1)}{\lambda!}$$

auch so schreiben

$$\frac{(-1)^\lambda}{a+b+\lambda}\binom{a+b+2\lambda-1}{\lambda}$$

so dass schliesslich

$$J^a(x)\,J^b(x) = x\frac{d}{dx}\overset{a+b}{J(x)}\sum_0^\infty{}_\lambda F(-a, -b, \lambda, 1)\frac{(-1)^\lambda}{a+b+\lambda}\cdot\binom{a+b+2\lambda-1}{\lambda} \quad (3)$$

§ 4. Analog hat man für den Quotienten zweier Bessel'scher Functionen erster Art folgendes:

Es ist die Bessel'sche Function 1. Art definirt durch

$$J^a(x) = \sum_0^\infty{}_n\,(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2n}}{n!\,(a+n)!}$$

Wenn wir dieselbe durch

$$J^b(x) = \sum_0^\infty{}_r\,(-1)^r\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,(b+r)!}$$

dividiren, so erhalten wir eine unendliche Reihe, die wieder nach steigenden Potenzen von x geordnet werden kann.

Die Exponenten sind von der Form $a-b+2\lambda$, wo λ alle Werte der positiven ganzen Zahlen durchläuft.

Um nun das allgemeine Glied der Quotienten zu erhalten, hält man λ bei irgend einem Werte fest und hat dann den Term

$$(-1)^{\lambda+r}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a\cdot 2(r-\lambda)}}{(\lambda+r)!\,(a+\lambda+r)!}$$

welcher der ersten Reihe angehört; dividiren wir ihn mit dem allgemeinen Term der zweiten Reihe, nämlich mit

$$\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,(b+r)!}$$

so erhalten wir als allgemeinen Term des Quotienten

$$\frac{(-1)^{\lambda+r}\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda+2r} r!\,(b+r)!}{(\lambda+r)!\,(a+\lambda+r)!\,(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}$$

$$\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{a-b+2\lambda} r!\,(b+r)!}{(\lambda+r)!\,(a+\lambda+r)!}$$

Es ist daher der Quotient zweier Bessel'scher Functionen 1. Grades und verschiedenen Parameters gleich

$$\frac{J^a(x)}{J^b(x)}=\sum_0^\infty{}_\lambda\sum_0^\lambda{}_r\,\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{a-b+2\lambda} r!\,(b+r)!}{(\lambda+r)!\,(a+\lambda+r)} \tag{4}$$

Wir multipliciren Zähler und Nenner mit

$$\lambda!\,(a-b+\lambda)!$$

und erhalten

$$\frac{J^a(x)}{J^b(x)}=\sum_0^\infty{}_\lambda\sum_0^\lambda{}_r\,\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{a-b+2\lambda}\lambda!\,(a-b+\lambda)!\,r!\,(b+r)!}{\lambda!\,(a-b+\lambda)!\,(\lambda+r)!\,(a+r)!}$$

und wir erhalten schliesslich da

$$\sum_0^\infty{}_r\,(-1)^\lambda\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-b+2\lambda}}{\lambda!\,(a-b+\lambda)!}=\overset{a-b}{J}(x)$$

den Ausdruck

$$\frac{J^a(x)}{J^b(x)}=\overset{a-b}{J}(x)\sum_0^\infty{}_\lambda\sum_0^\lambda{}_r\,\frac{\lambda!\,r!\,(a-b+\lambda)!\,(b+r)!}{(\lambda+r)!\,(a-\lambda+r)!} \tag{5}$$

§ 5. Es bleibt uns noch übrig, für das Product und den Quotienten 2. Bessel'scher Functionen 2. Art die entsprechenden Ausdrücke herzustellen.

Die Bessel'sche Function 2. Art (nach Neumann) ist definirt durch die Gleichung

$$O^a(x)=\sum_0^{<\frac{a+1}{2}}{}_n\,\frac{a}{4}\,\frac{(a-n-1)!}{n!}\left(\frac{2}{x}\right)^{a+1-2n}$$

wo a ganzzahlig.

Wenn man dieselbe mit

$$O^b(x) = \sum_{0}^{<\frac{b+1}{2}} r \frac{b}{4} \frac{(b-r-1)!}{r!} \left(\frac{2}{x}\right)^{b+1-2r}$$

multiplicirt, erhält man eine unendliche Reihe, die wieder nach steigenden Potenzen von x geordnet werden kann.

Die Exponenten sind von der Form

$$a + b + 2 - 2\lambda$$

wo λ alle Werte der positiven ganzen Zahlen von D bis $\lambda < \frac{a+b}{2} + 1$ durchlauft.

Um das allgemeine Glied des Productes zu erhalten, hält man λ zunächst bei irgend einem bestimmten Werte fest und multiplicirt den Term

$$\frac{a}{4} \frac{\{a-(\lambda-r)-1\}!}{(\lambda-r)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+1-2(\lambda-r)}$$

der ersten Reihe mit dem allgemeinen Term der zweiten Reihe

$$\frac{b}{4} \frac{(b-r-1)!}{r!} \left(\frac{2}{x}\right)^{b+1-2r}$$

Das Product dieser beiden Terme wird offenbar lauten

$$\frac{a}{4} \cdot \frac{b}{4} \frac{(a-\lambda+r-1)!\,(b-r-1)!}{(\lambda-r)!\,r!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+b+2-2\lambda}$$

und daher der allgemeine Term des Productes zweier Bessel'scher Functionen 2. Art verschiedenen Parameters in folgende Reihe entwickelt werden kann:

$$O^a(x)\ O^b(x) = \sum_{0}^{\lambda} r \frac{ab}{16} \frac{(a-\lambda+r-1)!\ (b-r-1)!}{(\lambda-r)!\ r!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+b+2-2\lambda}$$

oder

$$= \frac{ab}{4^2} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+b+2-2\lambda} \sum_{9}^{\lambda} r \frac{(a-\lambda+r-1)!\ (b-r-1)!}{(\lambda-r)!\ r!} \quad (\alpha)$$

Wir multipliciren nun Zähler und Nenner von (α) mit

$$\frac{a+b}{4} \frac{(a+b-\lambda-1)!}{\lambda!}$$

und erhalten

$$O^a(x)\,O^b(x) = \frac{a+b}{4} \frac{(a+b-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+b+2-2\lambda} \sum_{0}^{\lambda} r \frac{4\,ab}{16\,(a+b)}$$

$$\cdot \frac{(a-\lambda+r-1!\ (b-r-1)!\ \lambda!}{(\lambda-r)!\ r!\ (a+b-\lambda-1)!} \quad (\beta)$$

Wir berücksichtigen nun nach Definition der Function $O^n(x)$, dass bei einer Bessel'schen Function des Parameters $a + b$, λ nur laufen darf

von $\lambda = 0$ bis $\lambda < \frac{a+b+1}{2}$, so folgt dass wir für

$$\left(\frac{2}{x}\right)\sum_{0}^{<\frac{a+b+1}{2}} \lambda \frac{(a+b-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{a+b+1-2\lambda}$$

$$= \frac{2}{x} \overset{a+b}{O(x)}$$ setzen dürfen.

Somit ist

$$O^a(x)\,O^b(x) = \left(\frac{2}{x}\right) \overset{a+b}{O(x)} \sum_{0}^{\lambda} r \frac{ab}{a+b} \frac{\lambda}{r!(\lambda-r)!} \frac{(a-\lambda+r-1)!}{(a+b-\lambda-1)} (b-r-1)! \quad (6)$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda!}{r!\,(\lambda-r)!} = \binom{\lambda}{r}$$

folglich

$$O^a(x)O^b(x) = \frac{1}{x} \frac{ab}{2(a+b)} \overset{a+b}{O(x)} \sum_{0}^{\lambda} r \binom{\lambda}{r} \frac{(a-\lambda+r-1)!\,(b-r-1)!}{(a+b-\lambda-1)!} \quad (\beta)$$

§ 6. Für den Quotienten zweier Bessel'scher Functionen zweiter Art sei

$$O^a(x) = \sum_{0}^{<\frac{a+1}{2}} n \frac{a}{4} \frac{(a-n-1)!}{n!}\left(\frac{2}{x}\right)^{a+1-2n}$$

durch

$$O^b(x) = \sum_{0}^{<\frac{b+1}{2}} r \frac{b}{4} \frac{(b-r-1)!}{r!}\left(\frac{2}{x}\right)^{b+1-2r}$$

dividirt, erhält man eine unendliche Reihe, die wieder nach steigenden Potenzen von x geordnet werden kann.

Die Form der Exponenten wird lauten

$$a - b - 2\lambda$$

Halten wir zunächst bei λ irgend einen bestimmten Wert fest, so erhalten wir als Term der ersten Reihe

$$\frac{a}{4} \frac{\{a-(\lambda+r)-1\}!}{(\lambda+r)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{a+1-2(\lambda+r)}$$

Dividiren wir denselben durch den allgemeinen Term der zweiten Reihe, nämlich durch

$$\frac{b}{4} \frac{(b-r-1)!}{r!} \left(\frac{2}{x}\right)^{b+1-2r}$$

dann erhalten wir als allgemeinen Term des Quotienten

$$\frac{a}{4} \cdot \frac{4}{b} \frac{(a-\lambda-r-1)!\, r!}{(\lambda+r)!\,(b-r-1)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a+1-2\lambda-2r-b-1+2}$$

oder

$$\frac{a}{b} \frac{(a-\lambda-r-1)!\, r!}{(\lambda+r)!\,(b-r-1)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a-b-2\lambda}$$

Wir multipliciren Zähler und Nenner mit

$$\frac{a-b-1}{4} \frac{(a-b-\lambda-2)!}{\lambda!}$$

und erhalten als allgemeinen Term des Quotienten

$$\sum_{0}^{\lambda}{}_{r} \frac{a}{b} \frac{(a-b-1)}{4} \frac{4\,\lambda!}{(a-b-1)} \frac{(a-b-\lambda-2)!}{\lambda!\,(a-b-\lambda-2)!} \frac{(a-\lambda-r-1)!\, r!}{(\lambda+r)!\,(b-r-1)!} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{a-b-2\lambda}$$

wo λ alle Werte der positiven ganzen Zahlen bis $\frac{a-b}{2}$ durchläuft.

Nun ist aber

$$\sum_{0}^{<\frac{a-b}{2}}{}_{\lambda} \frac{(a-b-1)}{4} \frac{(a-b-\lambda-2)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{a-b-2\lambda} = \overset{a-b-1}{O}(x)$$

demnach ist der allgemeine Term

$$\overset{a-b-1}{O}(x) \sum_{0}^{\lambda}{}_{r} \frac{\lambda!\, r!}{(\lambda+r)!} \frac{4a(a-b-\lambda-2)!\,(a-\lambda-r-1)!}{b(a-b-1)(b-r-1)!}$$

oder

$$\frac{O^{a}(x)}{O^{b}(x)} = \frac{4a}{b(a-b-1)} \overset{a-b-1}{O}(x) \sum_{0}^{\frac{a-b}{2}}{}_{\lambda} \sum_{0}^{\lambda}{}_{r} \frac{\lambda!\, r!}{(\lambda+r)!} \frac{(a-b-\lambda-2)!\,(a-\lambda-r-1)!}{(b-r-1)!}$$

Hiermit schliessen wir unsere Ausführungen für diesmal ab und behalten uns vor, die Resultate der am Eingang dieses Abschnittes angedeuteten Methode später zur Veröffentlichung zu bringen.

Ich halte es für meine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. J. H. Graf für die Unterstützung mit Rat und That, die er mir während der Abfassung dieser Arbeit angedeihen liess, an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Litteratur-Nachweis.

Anger. J. Untersuchungen über die Function I_k^h mit Anwendungen auf das Keppler'sche Problem. Danzig, 1855.

Beltrami, E. Intorno ad un theorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. (Rendiconti del R. Instituto Lombardo, Serie II, Vol. XIII).

— — Intorno ad alcune serie triogonometriche (ibidem).

— — Sulla theoria delle funzioni potenziali simmetriche. (Memoria dell'Accademie delle Scienze dell'Instituto di Bologna, Serie IV, Tomo II).

— — Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della callotte sferica (ibidem, Tomo IV).

— — Sulle funzioni cilindriche (Atti della R. Accademie delle Scienze di Torino, Vol. XVI).

Bauer, C. Ueber Reihen nach Kugelfunctionen und deren Anwendung auf Cylinderfunctionen. (Berichte der Münchner Akademie aus dem Jahre 1875, III, p. 247).

Bessel, F. W. Untersuchungen eines Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. (Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1824, Mathem. Classe, p. 1).

Coates, W. Bessel's functions of the second order. (Quart.-Journal XX and XXI).

Dini, U. Serie di Fourrier e altre representazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. (Pisa 1880).

Ermakoff, S. Ueber die Cylinderfunctionen. (Mathematische Annalen, Bd. XIV).

Fourrier, J. Theorie analytique de la chaleur. (Paris, 1822).

Gegenbauer, L. Zur Theorie der Function $C_u^v(x)$. (Wiener Denkschriften XLVIII).

— — Ueber die Bessel'schen Functionen. (Berichte der Wiener Akademie, Bde. LXV, LXVI, LXX, LXXV, LXXXVIII, XCV).

Graf, J. H. Einige Eigenschaften der Bessel'schen Functionen. (Zeitschrift für Mathematik und Physik 1893).

— — Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen etc. (Math. Annalen, Bd. 43).

Gubler, E. Die Darstellung der allgemeinen Bessel'schen Function durch bestimmte Integrale.
(Zürcher Vierteljahrsschrift XXIII, Heft 2. 1888).

Günther, M. Bemerkungen über die Cylinderfunctionen.
(Grunert's Archiv LVI).

Haentzschel, C. Ueber den functionen-theoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen.
(Mathematische Annalen, Bd. 43).

Hankel, H. Cylinderfunctionen 1. und 2. Art.
(Mathematische Annalen, Bd. 1).

— — Bestimmte Integrale mittelst Cylinderfunctionen.
(Mathematische Annalen, Bd. 8).

Harnack, A. Ueber die Entwickelung einer beliebigen Function nach Bessel'schen Functionen.
(Berichte der k. sächsischen Akademie vom Jahre 1869, Bd. II).

Heine, J. Die Fourrier-Bessel'sche Function.
(Crelle's Journal, Bd. 69).

Herz, N. Bemerkungen zur Theorie der Bessel'schen Functionen.
(Astronomische Nachrichten, Nr. 2546, CVII).

Hurwitz, B. Ueber die o-Stellen der Bessel'schen Functionen.
(Mathematische Annalen, Bd. 23).

Jacobi, J. Formula transformationis integralium defin.
(Crelle's Journal 1836).

Juliani, J. Osservazioni sopra li funzioni sferiche etc.
(Rendiconti dell'Accademia dei Lincei).

König, L. Ueber Reihenentwickelungen nach Bessel'schen Functionen.
(Mathematische Annalen, Bd. XVII).

Letnikoff, S. Hypersphärische Functionen.
(Moskauer Mathematische Sammlung).

Lommel, E. Studien zur Theorie der Bessel'schen Functionen.
Leipzig, 1868.

— — Integration der Gleichung $x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} \mp y = o$ durch Bessel'sche Functionen.
(Mathematische Annalen 1870).

— — Zur Theorie der Bessel'schen Functionen (ibidem 1871).

Lipschütz, S. Ueber die Bessel'sche Transcendente J.
(Crelle's Journal 1859).

Mehler, J. Ueber eine mit Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function.
(Mathematische Annalen, Bd. 18).

Meissel, F. Die Bessel'schen Functionen $J^0(x)$ und $J^1(x)$.
(Programm Kiel 1890).

Neumann, C. Theorie der Wärme und Electricität.
(Crelle's Journal 1859).

— — Theorie der Bessel'schen Functionen. (Leipzig, 1867).

— — Ueber die Entwickelung einer beliebigen Function nach Bessel'schen Functionen. (Crelle's Journal, Bd. 67).

— — Ueber die Entwickelung der Fourrier-Besselschen Function nach Quadraten und Producten.
(Berichte der k. sächsischen Akademie 1869, Bd. II).

Niemöller, L. Formeln zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrales der Bessel'schen Differenzialgleichung.
(Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXV).

Nicolas, J. Sur les fonctions de Fourrier.
(Annales de l'école normale 1882).

Olbricht, K. Studien über die Kugel- und Cylinderfunctionen.
(Nova Acta der kais. Leopoldinischen Akademie, Bd. LII).

Poisson, S. Sur la distribution de la chaleur. (Paris, 1823).

Scheer, M. Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, P(z) und Q(z).
(Crelle's Journal XCVII).

Schläfli, L. Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über Bessel'sche Functionen.
(Mathematische Annalen, 1870).

— — Ueber die Convergenz der Entwickelungen nach Bessel'schen Functionen (ibidem Bd. 10).

Schlomilch, L. Ueber die Bessel'sche Function.
(Zeitschrift für Mathematik und Physik 1857).

Schönholzer, J. J. Ueber die Ausmittelung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. (Bern, 1877).

Sheppard, E. On some expressions of a function of a simple variable in terms of Bessel's functions.
(Quarterly Journal XXIII).

Stratt, T. On Bessel's functions.
(Philosophical Magazine 1872).

Sonnine, L. Sur les fonctions cylindriques.
(Mathematische Annalen, Bd. 16).

Weber, J. Die Bessel'sche Function und ihre Anwendung.
(Crelle's Journal, Bd. 75 u. 76).

Weber, H. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.
(Mathematische Annalen, Bd. XXXVIII, p. 404).

Errata.

Auf Seite 12, Zeilen 1 u. 3 soll es anstatt: $O^{u}(x)$ richtig heissen: $O^{n}(x)$

» » 16, Zeile 10 » » » $O^{-u}(x) = (-1)^{n} O^{u}(x)$ richtig heissen: $O^{-n}(x) = (-1)^{n} O^{n}(x)$

» » 16, » 12 » » » $O^{-n}(x+y) = (-1)^{n} O^{u}(x)$ richtig heissen: $O^{-n}(x+y) = (-1)^{n} O^{n}(x)$

» » 18, » 17 » » » $J^{\lambda}(\text{H}+y)$ und $K^{\lambda}(\text{H}+y)$ richtig heissen: $J^{\lambda}(x+y)$ und $K^{\lambda}(x+y)$

» » 20, » 10 » » » e^{Hs} richtig heissen: e^{xs}

» » 22, » 7 » » » $\int_{\left(-\frac{N}{X},\, 0\right)} e^{xs}\, t^{(-n-\lambda)-1}$ richtig heissen: $\int_{\left(-\frac{N}{X},\, 0\right)} e^{xs}\, t^{-(n-\lambda)-1}$

» » 23, » 14 » » » $O^{u}(x)$ richtig heissen: $O^{n}(x)$

» » 24, » 17 » » » $O^{u}(x)$ » » $O^{n}(x)$

» » 24, » 21 » » » $O^{u}(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y) \overset{u-\lambda}{O}(\text{H})$ richtig heissen: $O^{n}(x+y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, J^{\lambda}(y) \overset{n-\lambda}{O}(x)$

Auf Seite 25, Zeile 18 soll es anstatt: $\overset{u-\lambda}{O}(x)$ richtig heissen: $\overset{n-\lambda}{O}(x)$

» » 25, » 20 u. 22 » » » $\overset{u-\lambda}{O}(x)$ » » $\overset{n-\lambda}{O}(x)$

» » 26, » 4 u. 6 » » » $\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}$ » » $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\lambda}$

» » 26, » 10 » » » $\frac{(2\lambda)!\, x^{2\lambda-\varrho}\, y^{\varrho}}{2^{\lambda}!\, \varrho!\, (2\lambda-\varrho)\, (n+\lambda)!\, \lambda!}$ richtig heissen: $\frac{(2\lambda)!\, x^{2\lambda-\varrho}\, y^{\varrho}}{2^{2\lambda}\, \varrho!\, (2\lambda-\varrho)!\, (n+\lambda)!\, \lambda!}$

Auf Seite 26, In der Formel (41) fehlt im Nenner $\frac{1}{2^{\lambda}}$

» » 27, Zeile 7 soll es anstatt: $O^{u}(x-y)$ richtig heissen: $O^{n}(x-y)$

» » 28, » 3, 4, 6 » » » $\left(\frac{N}{0}, 0\right)$ und $\left(\frac{N}{x}, 0\right)$ richtig heissen: $\left(-\frac{N}{x}, 0\right)$

» » 29, » 7 fehlt ein *)

» » 29, » 8 » » » q^{u} richtig heissen: q^{n}

» » 29, » 13 » » » $\sqrt{\frac{x - yz}{x = \frac{y}{z}}}$ richtig heissen: $\sqrt{\frac{x - yz}{x - \frac{y}{z}}}$

» » 30, » 11 » » » $C^{n}m\,(\cos\varphi)$ » » $C_{m}^{n}\,(\cos\varphi)$

» » 32, » 2 » » » $(m+2n-1)l$ » » $(m+2n-1)!$

» » 32, » 4 » » » $\frac{2^{-2p}}{\varrho}$ » » $\frac{2^{p}}{2^{p/2}}$

» » 33, » 11 » » » $U = n^{-(1+n)}\, e^{-n}$ richtig heissen: $U = u^{-(1+n)}\, e^{-n}$

ebenso in Zeilen 12, 14 u. Formel 64. u. Zeile 18 u. S. 34, Zeile 2.

Auf Seite 38, Zeile 7 soll es anstatt: $O^{u}\left(\frac{x}{y}\right)$ richtig heissen: $O^{n}\left(\frac{x}{y}\right)$

» » 39, Formel (27) y abs < 1.

» » 47, » 4 » » » $\left(\frac{x}{2}\right)^{b+b+2\lambda}$ richtig heissen: $\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}$

» » 49, » 23 » » » $\left(\frac{x}{2}\right)^{a \cdot 2(r-\lambda)}$ » » $\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2(r-\lambda)}$

» » 51, » 6 » » » D richtig heissen: 0.

» » 54, » » » Günther, M. » » Günther S.

» » 55, » » » Lipschütz » » Lipschitz.

» » 56, » » » Schlomilch » » Schlömilch.

» « 56, » » » Weber, J. » » Weber, H.